ИДЗ 1.1 – Вариант 0

1. Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2}, a_{3j}. Вычислить определитель Δ: а) разложив его по элементам i-й строки; б) разложив его по элементам j-го столбца; в) получив предварительно нули в i-й строке.

1.0 $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad i = 2,\ \ j = 4$

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Находим:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 3\cdot(-3+4) - 1\cdot(2-4) + 4\cdot(-4+6) =$$

$$= 3 + 2 + 8 = 13$$

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 3\cdot(-4+3) + 4\cdot(-2-2) + 1\cdot(-3-4) =$$

$$= -3 - 16 - 7 = -26$$

Алгебраические дополнения элементов a_{22}, и a_{34} соответственно равны:

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1\cdot 13 = 13$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} M_{34} = (-1)\cdot(-26) = 26$$

Вычислим определитель Δ: а) разложив его по элементам 2-й строки

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}$$

Вычислим миноры по правилу треугольника:

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Тогда определитель

$$\Delta = -1\cdot\begin{vmatrix} -4 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -1\cdot(12 - 6 + 8 - (36 + 16 - 1)) +$$

$$+ 2\cdot(-9 + 4 - 16 - (-24 - 12 + 2)) + 1\cdot(-3 - 16 - 24 - (-8 - 18 - 8)) = 37 + 26 + 9 = 72$$

Вычислим определитель Δ: б) разложив его по элементам 4-го столбца

$$\Delta = a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} + a_{44}A_{44}$$

$$\Delta = -4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -4\cdot(2 - 12 - 6 - (-2 + 9 - 8)) -$$

$$- 2\cdot(-12 - 8 - 3 - (4 - 9 + 8)) + 1\cdot(-18 - 8 - 1 - (4 - 3 + 12)) = 60 + 52 - 40 = 72$$

Вычислим определитель Δ: в) получив предварительно нули в 2-й строке.
Умножим третий столбец на -1 и сложим с первым

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

умножим третий столбец на -2 и сложим со вторым

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot(10-48+20-(80+4-30)) = -1\cdot(-72) = 72$$

2. Даны две матрицы A и B. Найти: а) AB; б) BA; в) A^{-1}; г) AA^{-1}; д) $A^{-1}A$

2.0 $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

а)
Произведение AB имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.
Находим матрицу C=AB, элементы которой $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + ... + a_{in}b_{nj}$
Имеем:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot(-1)+(-4)\cdot 2+1\cdot 1 & 3\cdot(-3)+(-4)\cdot(-3)+1\cdot 4 & 3\cdot 2+(-4)\cdot(-2)+1\cdot 2 \\ 4\cdot(-1)+1\cdot 2+2\cdot 1 & 4\cdot(-3)+1\cdot(-3)+2\cdot 4 & 4\cdot 2+1\cdot(-2)+2\cdot 2 \\ 1\cdot(-1)+0\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot(-3)+0\cdot(-3)+2\cdot 4 & 1\cdot 2+0\cdot(-2)+2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 7 & 16 \\ 0 & -7 & 10 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

б)

$$D = BA = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1\cdot 3+(-3)\cdot 4+2\cdot 1 & -1\cdot(-4)+(-3)\cdot 1+2\cdot 0 & -1\cdot 1+(-3)\cdot 2+2\cdot 2 \\ 2\cdot 3+(-3)\cdot 4+(-2)\cdot 1 & 2\cdot(-4)+(-3)\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 2\cdot 1+(-3)\cdot 2+(-2)\cdot 2 \\ 1\cdot 3+4\cdot 4+2\cdot 1 & 1\cdot(-4)+4\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 1+4\cdot 2+2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 1 & -3 \\ -8 & -11 & -8 \\ 21 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Очевидно что $AB \neq BA$

в) Найти: A^{-1}

Обратная матрица A^{-1} матрицы A имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

По правилу треугольника, вычислим определитель:

$$\Delta A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 3 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} 3 & -4 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right) = 6 - 8 + 0 - (1 + 0 - 32) = 29 \neq 0$$

т.е. матрица A – невырожденная, и, значит, существует матрица A^{-1}.

Находим матрицу, состоящую из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \qquad A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-8 - 0) = 8$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(8 - 2) = -6 \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \qquad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 + 4) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 1 = -9 \qquad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(6 - 4) = -2$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 16 = 19$$

Таким образом получаем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 8 & 5 & -4 \\ -9 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

Полученную матрицу транспонируем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 8 & 5 & -4 \\ -9 & -2 & 19 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -9 \\ -6 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 19 \end{pmatrix}$$

Последнюю матрицу делим на определитель исходной матрицы и получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 2 & 8 & -9 \\ -6 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{29} & \frac{8}{29} & \frac{-9}{29} \\ \frac{-6}{29} & \frac{5}{29} & -\frac{2}{29} \\ -\frac{1}{29} & \frac{-4}{29} & \frac{19}{29} \end{pmatrix}$$

Найти: г) AA^{-1};

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3&-4&1\\4&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{29}\begin{pmatrix}2&8&-9\\-6&5&-2\\-1&-4&19\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}3\cdot 2+(-4)\cdot(-6)+1\cdot(-1) & 3\cdot 8+(-4)\cdot 5+1\cdot(-4) & 3\cdot(-9)+(-4)\cdot(-2)+1\cdot 19\\ 4\cdot 2+1\cdot(-6)+2\cdot(-1) & 4\cdot 8+1\cdot 5+2\cdot(-4) & 4\cdot(-9)+1\cdot(-2)+2\cdot 19\\ 1\cdot 2+0\cdot(-6)+2\cdot(-1) & 1\cdot 8+0\cdot 5+2\cdot(-4) & 1\cdot(-9)+0\cdot(-2)+2\cdot 19\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}29&0&0\\0&29&0\\0&0&29\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

Найти: д) $A^{-1}A$

$$A^{-1}A=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}2&8&-9\\-6&5&-2\\-1&-4&19\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-4&1\\4&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}\cdot=$$

$$=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}2\cdot 3+8\cdot 4+(-9)\cdot 1 & 2\cdot(-4)+8\cdot 1+(-9)\cdot 0 & 2\cdot 1+8\cdot 2+(-9)\cdot 2\\ -6\cdot 3+5\cdot 4+(-2)\cdot 1 & -6\cdot(-4)+5\cdot 1+(-2)\cdot 0 & -6\cdot 1+5\cdot 2+(-2)\cdot 2\\ -1\cdot 3+(-4)\cdot 4+19\cdot 1 & -1\cdot(-4)+(-4)\cdot 1+19\cdot 0 & -1\cdot 1+(-4)\cdot 2+19\cdot 2\end{pmatrix}=\frac{1}{29}\begin{pmatrix}29&0&0\\0&29&0\\0&0&29\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

т.е. обратная матрица найдена верно.