ИДЗ 1.2 – Вариант 0

1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

1.0 $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера – Капели. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

данной системы и ранг расширенной матрицы

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Разделим первую строку на 3. Умножим первую строку на -4 и сложим со второй, первую умножим на -1 и сложим с третьей. Разделим вторую строку на 19/3. Умножим вторую строку на (-4/3) и сложим с третьей строкой

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{19} & -\frac{5}{19} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{19} & -\frac{5}{19} \\ 0 & 0 & \frac{87}{57} & \frac{153}{57} \end{array}\right]$$

Следовательно, $\text{rang}A = \text{rang}B = 3$ (т.е. числу неизвестных). Значит исходная матрица совместна и имеет единственное решение.

а) по формулам Крамера

Найдем определитель Δ по правилу треугольника:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Найдем определитель Δ и значения $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot1\cdot2 + (-4)\cdot2\cdot1 + 1\cdot4\cdot0 - (1\cdot1\cdot1 + 3\cdot2\cdot0 + (-4)\cdot4\cdot2) = 6 - 8 + 0 - (1 + 0 - 32) = 29$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 16 + 0 - (2 + 0 + 24) = -44$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18 - 2 + 8 - (-3 + 12 - 8) = -13$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6+12+0-(-1+0-32) = 51$$

Формулы Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

$$x_1 = \frac{-44}{29} \qquad x_2 = \frac{-13}{29} \qquad x_3 = \frac{51}{29}$$

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом)

Для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме $AX = B$. Решение системы в матричной форме имеет вид $x = A^{-1}B$ По формуле

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ находим обратную матрицу A^{-1} (она существует, так как $\Delta = \Delta A = 29 \neq 0$

Находим матрицу, состоящую из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2-0 = 2 \qquad A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-8-0) = 8$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(8-2) = -6 \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6-1 = 5$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-1 = -1 \qquad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0+4) = -4$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8-1 = -9 \qquad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(6-4) = -2$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3+16 = 19$$

Таким образом получаем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 8 & 5 & -4 \\ -9 & -2 & 19 \end{pmatrix}$$

Полученную матрицу транспонируем:

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 & -1 \\ 8 & 5 & -4 \\ -9 & -2 & 19 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -9 \\ -6 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 19 \end{pmatrix}$$

Тогда решение системы:

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 2 & 8 & -9 \\ -6 & 5 & -2 \\ -1 & -4 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)+8\cdot(-3)+(-9)\cdot 2 \\ -6\cdot(-1)+5\cdot(-3)+(-2)\cdot 2 \\ -1\cdot(-1)+(-4)\cdot(-3)+19\cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} -44 \\ -13 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-44}{29} \\ \frac{-13}{29} \\ \frac{51}{29} \end{pmatrix}$$

Итак, $x_1 = \frac{-44}{29}$ $\quad x_2 = \frac{-13}{29}$ $\quad x_3 = \frac{51}{29}$

в) методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Напишем матрицу системы:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]/3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ II-4I \\ III-I \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right]/\frac{19}{3} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{19} & -\frac{5}{19} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right] III-\frac{4}{3}II \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{19} & -\frac{5}{19} \\ 0 & 0 & \frac{87}{57} & \frac{153}{57} \end{array}\right]$$

Выпишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3} \\ x_2 + \frac{2}{19}x_3 = -\frac{5}{19} \\ \frac{87}{57}x_3 = \frac{153}{57} \end{cases}$$

Находим значения x_1, x_2, x_3

$$x_3 = \frac{153}{57}\cdot\frac{57}{87} = \frac{51}{29}$$

$$x_2 + \frac{2}{19}\cdot\frac{51}{29} = -\frac{5}{19} \qquad x_2 = -\frac{5}{19} - \frac{102}{551} = \frac{-145-102}{551} = \frac{-247}{551} = -\frac{13}{29}$$

$$x_1 - \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{13}{29}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{51}{29} = -\frac{1}{3} \qquad x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{52}{87} - \frac{17}{29} = \frac{-29-52-51}{87} = \frac{-132}{87} = \frac{-44}{29}$$

Итак, $x_1 = \frac{-44}{29}$ $\quad x_2 = \frac{-13}{29}$ $\quad x_3 = \frac{51}{29}$

2. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

2.0 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера – Капели. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

данной системы и ранг расширенной матрицы

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Умножим первую строку на (-2) и сложим со второй, умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей. Умножим вторую строку на (-1) и сложим с третьей строкой

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & -11 & 10 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 4 \\ 0 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

Теперь ясно, что rangA=2, rangB=3. Согласно теореме Кронекера – Капели, из того, что $\mathrm{rang}A \neq \mathrm{rang}B$, следует несовместность исходной матрицы (не имеет решений).

3. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

3.0 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

Найдем определитель Δ по правилу треугольника:

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot(-5) + 1\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 2 - (1\cdot(-1)\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot(-5)) =$$

$$= 15 + 3 + 4 - (-1 + 18 - 10) = 15$$

Так как $\Delta = 15$ поэтому система имеет единственное нулевое решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

4.0 $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 7x_1 - 6x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Найдем определитель Δ по правилу треугольника:

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \\ 7 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot(-3)\cdot(-1) + (-3)\cdot 4\cdot 7 + (-5)\cdot 3\cdot(-6) - (-5\cdot(-3)\cdot 7 + 4\cdot 4\cdot(-6) + (-3)\cdot 3\cdot(-1)) =$$

$$= 12 - 84 + 90 - (105 - 96 + 9) = 0$$

Так как $\Delta = 0$ то система имеет бесчисленное множество решений. Поскольку rangA=2, n=3, возьмем любые два уравнения системы (например, первое и второе) и найдем ее решение

Имеем:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Так как определитель из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2 и переместим члены с x_3 в правые части уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 5x_3 \\ 3x_1 - 3x_2 = -4x_3 \end{cases}$$

Решаем последнюю систему по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_2^{(1)}}{\Delta_2}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2^{(2)}}{\Delta_2}$$

где $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 9 = -3$

$$\Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 5x_3 & -3 \\ -4x_3 & -3 \end{vmatrix} = -15x_3 - 12x_3 = -27\cdot x_3$$

$$\Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 4 & 5x_3 \\ 3 & -4x_3 \end{vmatrix} = -16x_3 - 15x_3 = -31x_3$$

Отсюда находим, что $x_1 = \dfrac{-27\cdot x_3}{-3}$, $\quad x_2 = \dfrac{-31x_3}{-3}$

Полагая $x_3 = -3k$, где k – произвольный коэффициент пропорциональности, получаем решение исходной системы:

$$x_1 = -27k; \quad x_2 = -31k; \quad x_3 = -3k$$