

Наш сайт: Fizmathim.ru

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

ИДЗ 10.2 – Вариант 0.

1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

1.0 $S: z = 1/2x^2 - 1/2y^2, M_0(3, 1, 4)$

Находим частные производные:

$$f'_x(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \right)'_x = \frac{1}{2} \cdot 2x^{2-1} = x$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \right)'_y = -\frac{1}{2} \cdot 2y^{2-1} = -y$$

Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(3, 1)$:

$$f'_x(3, 1) = 3$$

$$f'_y(3, 1) = -1$$

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к данной поверхности

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

А уравнение нормали через точку $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Тогда, подставляя найденные значения, найдем уравнение касательной:

$$z - 4 = 3(x - 3) - 1(y - 1)$$

уравнение нормали

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 4}{-1}$$

2. Найти вторые частные производные указанных функций. Убедиться в том, что $z''_{xy} = z''_{yx}$

2.0 $z = e^{3x^2+5y^2}$

Вначале находим первые частные производные данной функции:

$$z'_x = \left(e^{3x^2+5y^2} \right)'_x = 3 \cdot 2xe^{3x^2+5y^2} = 6xe^{3x^2+5y^2}$$

$$z'_y = \left(e^{3x^2+5y^2} \right)'_y = 5 \cdot 2ye^{3x^2+5y^2} = 10ye^{3x^2+5y^2}$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по x и по y , находим вторые частные производные данной функции:

$$z''_{xx} = \left(6xe^{3x^2+5y^2} \right)'_x = 6e^{3x^2+5y^2} + 6x \cdot 3 \cdot 2xe^{3x^2+5y^2} = 6e^{3x^2+5y^2} + 36x^2e^{3x^2+5y^2}$$

$$z''_{yy} = \left(10ye^{3x^2+5y^2} \right)'_y = 10e^{3x^2+5y^2} + 10y \cdot 5 \cdot 2ye^{3x^2+5y^2} = 10e^{3x^2+5y^2} + 100y^2e^{3x^2+5y^2}$$

Найдем: z''_{xy} и z''_{yx}

$$z''_{xy} = \left(6xe^{3x^2+5y^2} \right)'_y = 6x \cdot 5 \cdot 2ye^{3x^2+5y^2} = 60xye^{3x^2+5y^2}$$

$$z''_{yx} = \left(10ye^{3x^2+5y^2} \right)'_x = 10y \cdot 3 \cdot 2xe^{3x^2+5y^2} = 60xye^{3x^2+5y^2}$$

Следовательно

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u .

3.0 $9 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u = e^{-\cos(x+3y)}$

Находим частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{-\cos(x+3y)} \right)'_x = e^{-\cos(x+3y)} \cdot (-\cos(x+3y))'_x = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{-\cos(x+3y)} \right)'_y = e^{-\cos(x+3y)} \cdot (-\cos(x+3y))'_y = 3e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y) \right)'_x = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y) \cdot \sin(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)} \cdot \cos(x+3y) = \\ &= e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin^2(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)} \cdot \cos(x+3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(3e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y) \right)'_y = 3e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y) \cdot 3\sin(x+3y) + 3e^{-\cos(x+3y)} \cdot 3\cos(x+3y) = \\ &= 9e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin^2(x+3y) + 9e^{-\cos(x+3y)} \cdot \cos(x+3y) \end{aligned}$$

Подставляем полученные значения производных в левую часть и правую часть исходного уравнения:

$$9 \cdot \left(e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin^2(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)} \cdot \cos(x+3y) \right) = 9e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin^2(x+3y) + 9e^{-\cos(x+3y)} \cdot \cos(x+3y)$$

$$9e^{-\cos(x+3y)} \left(\sin^2(x+3y) + \cos(x+3y) \right) = 9e^{-\cos(x+3y)} \left(\sin^2(x+3y) + \cos(x+3y) \right)$$

Следовательно, функция u удовлетворяет исходному уравнению

4. Исследовать на экстремум следующие функции.

$$4.0 \quad z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$$

Находим первые частные производные данной функции

$$z'_x = (x^2 + xy + y^2 - 2x - y)'_x = 2x + y - 2$$

$$z'_y = (x^2 + xy + y^2 - 2x - y)'_y = 2y + x - 1$$

Приравняв их к нулю, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2y + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ 2(2 - 2x) + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ 4 - 4x + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ -3x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Стационарная точка данной функции: $M(1, 0)$

Для того, чтобы сформулировать достаточные условия экстремума функции двух переменных, введем следующие обозначения:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0) \quad \Delta = AC - B^2$$

Достаточные условия экстремума.

Если $\Delta > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума для данной функции, причем M_0 будет точкой максимума при $A < 0$ ($C < 0$) и точкой минимума при $A > 0$ ($C > 0$)

Если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;

Если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть;

Найдем вторые частные производные данной функции:

$$z''_{xx} = (2x + y - 2)'_x = 2$$

$$z''_{xy} = (2x + y - 2)'_y = 1$$

$$z''_{yy} = (2y + x - 1)'_y = 2$$

Подставляя в полученные выражения для производных координаты стационарных точек, и используя достаточные условия экстремума

Для точки $M(1, 0)$

$$A = z''_{xx} = 2; \quad B = z''_{xy} = 1; \quad C = z''_{yy} = 2$$

$$\Delta = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0 \text{ экстремум есть в точке } M(1; 0)$$

Так как $A > 0$ ($C > 0$), то в точке M будет минимум

$$z_{\min} = z(1; 0) = 1^2 + 1 \cdot 0 + 0^2 - 2 \cdot 1 - 0 = 1 - 2 = -1$$

$$\text{Ответ: } z_{\min} = z(1; 0) = -1$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=z(x, y)$ в области D , ограниченной заданными линиями.

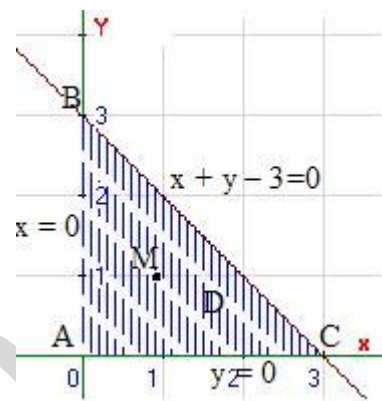
5.0 $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$, $D: x = 0, y = 0, x + y = 3$

Выясним, существуют ли стационарные точки, лежащие внутри данной области D , т.е. внутри треугольника ABC

$$z'_x = (x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5)'_x = 2x + 4y - 6$$

$$z'_y = (x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5)'_y = 4x - 4y$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 4y = 6 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = 6 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$



Решая полученную систему уравнений, находим стационарную точку $M(1; 1)$. Она лежит в области D , рассмотрим ее.

$$z(1; 1) = 1^2 - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 5 = 1 - 2 + 4 - 6 + 5 = 2$$

Исследуем значения функции на границе области D , состоящей из линий $x = 0, y = 0, x + y = 3$

$x = 0, 0 \leq y \leq 3$, отсюда $z = -2y^2 + 5, z'_y = -4y, -4y = 0; y = 0$

Точка $E(0; 0)$ совпадает с точкой A

$$z(0; 0) = 0^2 - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$$

$y = 0, 0 \leq x \leq 3$, отсюда $z = x^2 - 6x + 5, z'_x = 2x - 6, 2x = 6, x = 3$

Точка $F(3; 0)$ совпадает с точкой C

$$z(3; 0) = 3^2 - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 3 \cdot 0 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$

$y = 3 - x, 0 \leq x \leq 3$, отсюда

$$z = x^2 + 2(3 - x)^2 + 4x(3 - x) - 6x + 5 = x^2 + 18 - 12x + 2x^2 + 12x - 4x^2 - 6x + 5 = -x^2 - 6x + 23$$

$$z'_x = -2x - 6, x = -3, \text{ Точка } G(-3; 6) \text{ не лежит в области } D$$

Найдем значения функции в точках пересечения линий, ограничивающих область D .

$$z(0; 0) = 0^2 - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$$

$$z(3; 0) = 3^2 - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 3 \cdot 0 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$

$$z(0; 3) = 0^2 - 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 0 \cdot 3 - 6 \cdot 0 + 5 = -18 + 5 = -13$$

Выберем наибольшее и наименьшее значения

$$z_{\text{наиб}}(0; 0) = 5, z_{\text{наим}}(0; 3) = -13$$