ИДЗ 10.2 – Вариант 0.

1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

1.0 S: $z = 1/2x^2 - 1/2y^2$, $M_0(3, 1, 4)$

Находим частные производные:

$$f'_x(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)'_x = \frac{1}{2}\cdot 2x^{2-1} = x$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)'_y = -\frac{1}{2}\cdot 2y^{2-1} = -y$$

Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(3, 1)$:

$f'_x(3, 1) = 3$

$f'_y(3, 1) = -1$

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к данной поверхности

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

А уравнение нормали через точку $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Тогда, подставляя найденные значения, найдем уравнение касательной:

$$z - 4 = 3(x - 3) - 1(y - 1)$$

уравнение нормали

$$\frac{x - 3}{3} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 4}{-1}$$

2. Найти вторые частные производные указанных функций. Убедиться в том, что $z''_{xy}= z''_{yx}$

2.0 $z = e^{3x^2+5y^2}$

Вначале находим первые частные производные данной функции:

$$z'_x = \left(e^{3x^2+5y^2}\right)'_x = 3\cdot 2xe^{3x^2+5y^2} = 6xe^{3x^2+5y^2}$$

$$z'_y = \left(e^{3x^2+5y^2}\right)'_y = 5\cdot 2ye^{3x^2+5y^2} = 10ye^{3x^2+5y^2}$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по x и по y, находим вторые частные производные данной функции:

$$z''_{xx} = \left(6xe^{3x^2+5y^2}\right)'_x = 6e^{3x^2+5y^2} + 6x\cdot 3\cdot 2xe^{3x^2+5y^2} = 6e^{3x^2+5y^2} + 36x^2e^{3x^2+5y^2}$$

$$z''_{yy} = \left(10ye^{3x^2+5y^2}\right)'_y = 10e^{3x^2+5y^2} + 10y\cdot 5\cdot 2ye^{3x^2+5y^2} = 10e^{3x^2+5y^2} + 100y^2e^{3x^2+5y^2}$$

Найдем: z''_{xy} и z''_{yx}

$$z''_{xy} = \left(6xe^{3x^2+5y^2}\right)'_y = 6x\cdot 5\cdot 2ye^{3x^2+5y^2} = 60xye^{3x^2+5y^2}$$

$$z''_{yx} = \left(10ye^{3x^2+5y^2}\right)'_x = 10y\cdot 3\cdot 2xe^{3x^2+5y^2} = 60xye^{3x^2+5y^2}$$

Следовательно

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

3.0 $9\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\quad u = e^{-\cos(x+3y)}$

Находим частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{-\cos(x+3y)}\right)'_x = e^{-\cos(x+3y)}\cdot\left(-\cos(x+3y)\right)'_x = e^{-\cos(x+3y)}\cdot\sin(x+3y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{-\cos(x+3y)}\right)'_y = e^{-\cos(x+3y)}\cdot\left(-\cos(x+3y)\right)'_y = 3e^{-\cos(x+3y)}\cdot\sin(x+3y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(e^{-\cos(x+3y)}\cdot\sin(x+3y)\right)'_x = e^{-\cos(x+3y)}\cdot\sin(x+3y)\cdot\sin(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)}\cdot\cos(x+3y) =$$
$$= e^{-\cos(x+3y)}\cdot\sin^2(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)}\cdot\cos(x+3y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(3e^{-\cos(x+3y)}\cdot\sin(x+3y)\right)'_x = 3e^{-\cos(x+3y)}\cdot\sin(x+3y)\cdot 3\sin(x+3y) + 3e^{-\cos(x+3y)}3\cos(x+3y) =$$
$$= 9e^{-\cos(x+3y)}\cdot\sin^2(x+3y) + 9e^{-\cos(x+3y)}\cdot\cos(x+3y)$$

Подставляем полученные значения производных в левую часть и правую часть исходного уравнения:

$$9\cdot\left(e^{-\cos(x+3y)}\cdot\sin^2(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)}\cdot\cos(x+3y)\right) = 9e^{-\cos(x+3y)}\cdot\sin^2(x+3y) + 9e^{-\cos(x+3y)}\cdot\cos(x+3y)$$

$$9e^{-\cos(x+3y)}\left(\sin^2(x+3y) + \cos(x+3y)\right) = 9e^{-\cos(x+3y)}\left(\sin^2(x+3y) + \cos(x+3y)\right)$$

Следовательно, функция u удовлетворяет исходному уравнению

4. Исследовать на экстремум следующие функции.

4.0 $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

Находим первые частные производные данной функции
$$z'_x = \left(x^2 + xy + y^2 - 2x - y\right)'_x = 2x + y - 2$$
$$z'_y = \left(x^2 + xy + y^2 - 2x - y\right)'_y = 2y + x - 1$$
Приравнивая их к нулю, получаем систему уравнений
$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2y + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ 2(2 - 2x) + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ 4 - 4x + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ -3x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$
Стационарная точка данной функции: $M(1, 0)$

Для того, чтобы сформулировать достаточные условия экстремума функции двух переменных, введем следующие обозначения:
$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \; B = f''_{xy}(x_0, y_0), \; C = f''_{yy}(x_0, y_0) \quad \Delta = AC - B^2$$
Достаточные условия экстремума.
Если $\Delta > 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума для данной функции, причем M_0 будет точкой максимума при $A < 0$ $(C < 0)$ и точкой минимума при $A > 0$ $(C > 0)$
Если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;
Если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть;

Найдем вторые частные производные данной функции:
$$z''_{xx} = (2x + y - 2)'_x = 2$$
$$z''_{xy} = (2x + y - 2)'_y = 1$$
$$z''_{yy} = (2y + x - 1)'_y = 2$$
Подставляя в полученные выражения для производных координаты стационарных точек, и используя достаточные условия экстремума

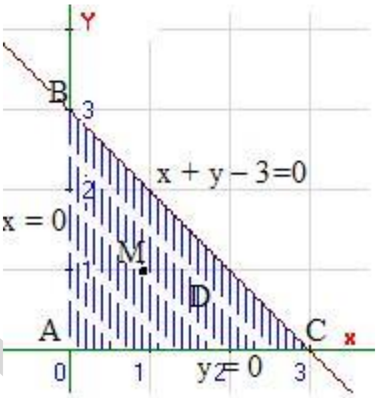
Для точки $M(1, 0)$
$A = z''_{xx} = 2$; $B = z''_{xy} = 1$; $C = z''_{yy} = 2$
$\Delta = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$ экстремум есть в точке $M(1; 0)$
Так как $A > 0$ $(C > 0)$, то в точке M будет минимум
$$z_{min} = z(1; 0) = 1^2 + 1 \cdot 0 + 0^2 - 2 \cdot 1 - 0 = 1 - 2 = -1$$
Ответ: $z_{min} = z(1; 0) = -1$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=z(x, y) в области D, ограниченной заданными линиями.

5.0 $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$, D: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$

Выясним, существуют ли стационарные точки, лежащие внутри данной области D, т.е. внутри треугольника ABC

$$z'_x = \left(x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5\right)'_x = 2x + 4y - 6$$
$$z'_y = \left(x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5\right)'_y = 4x - 4y$$



$$\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 4y = 6 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = 6 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим стационарную точку $M(1;\,1)$. Она лежит в области D, рассмотрим ее.

$z(1;\,1) = 1^2 - 2\cdot 1^2 + 4\cdot 1\cdot 1 - 6\cdot 1 + 5 = 1 - 2 + 4 - 6 + 5 = 2$

Исследуем значения функции на границе области D, состоящей из линий $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$

$x = 0,\ 0 \le y \le 3$, отсюда $z = -2y^2 + 5$, $z'_y = -4y$, $-4y = 0;\ y = 0$

Точка $E(0;\,0)$ совпадает с точкой A

$z(0;\,0) = 0^2 - 2\cdot 0^2 + 4\cdot 0\cdot 0 - 6\cdot 0 + 5 = 5$

$y = 0,\ 0 \le x \le 3$, отсюда $z = x^2 - 6x + 5$, $z'_x = 2x - 6$, $2x = 6,\ x = 3$

Точка $F(3;\,0)$ совпадает с точкой C

$z(3;\,0) = 3^2 - 2\cdot 0^2 + 4\cdot 3\cdot 0 - 6\cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$

$y = 3 - x$, $0 \le x \le 3$, отсюда

$z = x^2 + 2(3 - x)^2 + 4x(3 - x) - 6x + 5 = x^2 + 18 - 12x + 2x^2 + 12x - 4x^2 - 6x + 5 = -x^2 - 6x + 23$

$z'_x = -2x - 6,\ x = -3$, Точка $G(-3;\,6)$ не лежит в области D

Найдем значения функции в точках пересечения линий, ограничивающих область D.

$z(0;\,0) = 0^2 - 2\cdot 0^2 + 4\cdot 0\cdot 0 - 6\cdot 0 + 5 = 5$

$z(3;\,0) = 3^2 - 2\cdot 0^2 + 4\cdot 3\cdot 0 - 6\cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$

$z(0;\,3) = 0^2 - 2\cdot 3^2 + 4\cdot 0\cdot 3 - 6\cdot 0 + 5 = -18 + 5 = -13$

Выберем наибольшее и наименьшее значения

$z_{наиб}(0;\,0) = 5$, $z_{наим}(0;\,3) = -13$