ИДЗ 11.1 – Вариант 0.

1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

1.0 $\sqrt[3]{x-3}dy - e^y dx = 0$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные на $\sqrt[3]{x-3}$ и e^y:

$$\frac{dy}{e^y} = \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}$$

Интегрируем обе части последнего равенства:

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}$$

Интеграл правой части

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}} = \int (x-3)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{(x-3)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{(x-3)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-3)^2} + C$$

Интеграл левой части

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int e^{-y} dy = -e^{-y} + C$$

Тогда

$$-e^{-y} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-3)^2} + C$$

$$-\frac{1}{e^y} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-3)^2} + C$$

$$e^y = -\frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-3)^2} + C}$$

Следовательно, общим решением исходного уравнения является:

$$y = -\ell n\left(C - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-3)^2}\right)$$

2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

2.0 $(2x + 1)dy + y^2dx = 0$

$$(2x+1)dy = -y^2dx$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные на $(2x + 1)$ и y^2:

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{2x+1}$$

Интегрируем обе части последнего равенства:

$$\int\frac{dy}{y^2} = -\int\frac{dx}{2x+1}$$

Интеграл левой части

$$\int\frac{dy}{y^2} = \frac{y^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{y} + C$$

Интеграл правой части

$$\int\frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\ell n|2x+1| + C$$

Тогда

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}\ell n|2x+1| + C$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\ell n|2x+1| + C$$

Следовательно, общим решением исходного уравнения является:

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2}\ell n|2x+1| + C}$$

3. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения.

3.0 $(x + 2y)dx = xdy$
Исходное уравнения является однородным уравнением первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y = xu(x)$. Далее находим
Полагаем:
$$u = \frac{y}{x},\ ux = y,\ dy = xdu + udx$$
Тогда
$$(x + 2ux)dx - x(xdu + udx) = 0$$
$$x(1 + 2u)dx - x(xdu + udx) = 0$$
$$dx + 2udx - xdu - udx = 0$$
$$dx + udx - xdu = 0$$
$$xdu = (1 + u)dx$$
Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные на x и $(1+u)$:
$$\frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x}$$
Интегрируем обе части последнего равенства:
$$\int \frac{du}{1+u} = \int \frac{dx}{x}$$
$$\ell n|1+u| = \ell nx + \ell nC$$
$$1 + u = x \cdot C$$
Подставляем $u = \frac{y}{x}$
Следовательно, общим решением исходного уравнения является:
$$1 + \frac{y}{x} = x \cdot C$$
$$\frac{y}{x} = x \cdot C - 1$$
$$y = Cx^2 - x$$

4. Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения.

4.0 $xy' + 2y = x^4, \quad y\left(\sqrt{2}\right) = \frac{13}{6}$

Разделим исходное уравнение на x

$$y' + 2\frac{y}{x} = x^3$$

Решаем уравнение с помощью подстановки $y = u(x)\upsilon(x)$

Имеем: $y' = u'\upsilon + u\upsilon'$

Тогда

$$u'\upsilon + u\upsilon' + 2\frac{u\upsilon}{x} = x^3$$

$$u'\upsilon + u\left(\upsilon' + 2\frac{\upsilon}{x}\right) = x^3 \qquad (1)$$

Находим функцию $\upsilon(x)$ из условия $\upsilon' + 2\frac{\upsilon}{x} = 0$

$$\frac{d\upsilon}{dx} = -2\frac{\upsilon}{x} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -2\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -2\int\frac{dx}{x}$$

$$\ell n\upsilon = -2\ell nx$$

$$\upsilon = \frac{1}{x^2}$$

Подставляем полученное выражение для $\upsilon(x)$ в уравнение (1)

$$u'\frac{1}{x^2} = x^3$$

$$\frac{du}{dx} = x^5 \Rightarrow du = x^5dx$$

$$\int du = \int x^5dx$$

Тогда

$$u = \frac{x^6}{6} + C$$

$$y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^6}{6} + C\right) = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$$

Тогда $y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$ - является общим решением исходного уравнения.

Находим C, используя начальное условие $y\left(\sqrt{2}\right) = \frac{13}{6}$

$$\frac{13}{6} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{6} + \frac{C}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{13}{6} = \frac{4}{6} + \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{9}{6} = \frac{C}{2} \Rightarrow C = 3$$

Окончательно получаем, что частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = \frac{x^4}{6} + \frac{3}{x^2}$$

5. Найти общее решение дифференциального уравнения.

5.0 $x^2y^2y' + y^3x = 1$

Разделим обе части уравнения на x^2y^2

$$\frac{x^2y^2y'}{x^2y^2} + \frac{y^3x}{x^2y^2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2y^2}$$

Данное уравнение является уравнением Бернулли. Решаем его с помощью подстановки $y = u(x)\upsilon(x)$

Имеем: $y' = u'\upsilon + u\upsilon'$

Тогда

$$u'\upsilon + u\upsilon' + \frac{u\upsilon}{x} = \frac{1}{x^2u^2\upsilon^2}$$

$$u'\upsilon + u\left(\upsilon' + \frac{\upsilon}{x}\right) = \frac{1}{x^2u^2\upsilon^2} \qquad (1)$$

Находим функцию $\upsilon(x)$ из условия $\upsilon' + \dfrac{\upsilon}{x} = 0$

$$\frac{d\upsilon}{dx} = -\frac{\upsilon}{x} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ell n\upsilon = -\ell n|x|$$

$$\upsilon = \frac{1}{x}$$

Подставляем полученное выражение для $\upsilon(x)$ в уравнение (1)

$$u'\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2u^2\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{u^2}$$

$$u^2du = xdx$$

Интегрируем обе части последнего равенства:

$$\int u^2du = \int xdx$$

Интеграл левой части:

$$\int u^2du = \int u^2du = \frac{u^{2+1}}{2+1} + C = \frac{u^3}{3} + C$$

Тогда

$$\frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow u^3 = \frac{3x^2}{2} + C \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + C}$$

Окончательно находим, что общее решение исходного уравнения определяется формулой:

$$y = \frac{1}{x} \cdot \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + C}$$