ИДЗ 11.2 – Вариант 0.

1. Найти частное решение дифференциального уравнения и вычислить значение полученной функции y=φ(x) при $x=x_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

1.0 $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 3x}$, $x_0 = \dfrac{3}{4}\pi$, $y(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\pi}{4}$, $y'(\dfrac{\pi}{4}) = 1$.

Найдем общее решение данного уравнения

$$y'' = \frac{1}{\sin^2 3x}$$

Находим y':

$$y' = \int y''dx = \int \frac{1}{\sin^2 3x}dx = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}3x + C_1$$

Находим y:

$$y = \int y'dx = \int\left(-\frac{1}{3}\mathrm{ctg}3x + C_1\right)dx$$

Интеграл

$$\int\frac{1}{3}\mathrm{ctg}3xdx = \frac{1}{3}\int\frac{\cos 3x}{\sin 3x}dx = \begin{vmatrix} \sin 3x = t \\ dt = 3\cos 3xdx \end{vmatrix} = \frac{1}{3\cdot 3}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{9}\ell nt + C = \frac{1}{9}\ell n|\sin 3x| + C$$

В итоге:

$$y = -\frac{1}{9}\ell n|\sin 3x| + C_1x + C_2$$

Воспользовавшись начальными условиями, определим C_1, C_2

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$1 = -\frac{1}{3}\mathrm{ctg}3\cdot\frac{\pi}{4} + C_1 \Rightarrow 1 = -\frac{1}{3}\cdot(-1) + C_1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{3} = C_1 \Rightarrow \frac{2}{3} = C_1$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{9}\ell n\left|\sin 3\cdot\frac{\pi}{4}\right| + \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4} + C_2 \Rightarrow \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{9}\ell n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{6} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{9\cdot 4}\ell n(4) \Rightarrow C_2 = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{36}\ell n(4)$$

Частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям имеет вид

$$y = -\frac{1}{9}\ell n|\sin 3x| + \frac{2}{3}x + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{36}\ell n(4)$$

Вычислим значение функции y(x) при $x_0 = 3\pi/4$

$$y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{9}\ell n\left|\sin\left(3\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right| + \frac{2}{3}\cdot\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{36}\ell n(4) = \frac{1}{36}\ell n(4) + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{36}\ell n(4) = \frac{7\pi}{12} = \frac{7\cdot 3{,}14}{12} = 1{,}83$$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка

2.0 $x^2y''' = y''^2$

Данное уравнение является уравнение II типа (n=3, k =2), т.е. не содержит y.
Сделаем подстановку $y'' = z(x)$. Тогда $y''' = z'$

$$z'x^2 = z^2$$
$$\frac{dz}{dx}x^2 = z^2$$
$$x^2dz = z^2dx$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на x^2 и z^2:

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2}$$

Проинтегрируем:

$$\int\frac{dz}{z^2} = \int\frac{dx}{x^2}$$
$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + C_1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x} - C_1$$
$$z = \frac{1}{\frac{1}{x} - C_1} \Rightarrow z = \frac{x}{1 - C_1x}$$

Так как $z = y''$, то последнее уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка, которое решается двукратным интегрированием:

$$y' = \int y''dx = \int\frac{x}{1-C_1x}dx = \int\left(-\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1}\cdot\frac{1}{1-C_1x}\right)dx = -\frac{1}{C_1}x - \frac{1}{C_1^2}\ell n|1 - C_1x| + C_2$$

$$y = \int y'dx = \int\left(-\frac{1}{C_1}x - \frac{1}{C_1^2}\ell n|1-C_1x| + C_2\right)dx = -\frac{1}{C_1}\int xdx - \frac{1}{C_1^2}\int \ell n|1-C_1x|dx + \int C_2dx$$

Интеграл:

$$\frac{1}{C_1^2}\int\ell n|1-C_1x|dx = \left|\begin{matrix} u = \ell n|1-C_1x|; & dv = dx \\ du = dx; & v = \dfrac{-C_1}{1-C_1x}\end{matrix}\right| = -\frac{1}{C_1^2}\cdot\frac{C_1}{1-C_1x}\cdot\ell n|1-C_1x| + \frac{1}{C_1^2}\cdot\int\frac{C_1}{1-C_1x}dx =$$

$$= -\frac{1}{C_1(1-C_1x)}\cdot\ell n|1-C_1x| - \frac{1}{C_1^2}\ell n|1-C_1x| + C$$

Тогда

$$y = -\frac{1}{C_1}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{C_1(1-C_1x)}\cdot\ell n|1-C_1x| + \frac{1}{C_1^2}\ell n|1-C_1x| + C_2x + C_3$$

В итоге общее решение уравнения:

$$y = -\frac{1}{C_1}\cdot\frac{x^2}{2} + \frac{1}{C_1(1-C_1x)}\cdot\ell n|1-C_1x| + \frac{1}{C_1^2}\ell n|1-C_1x| + C_2x + C_3$$

3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

3.0 $yy'' = y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Данное уравнение является уравнением III типа, так как не содержит явно аргумент x и n=2.
Понизим порядок уравнения с помощью подстановки $y' = p(y)$. Тогда $y'' = p \cdot p'$

$$yp \cdot p' = p^2$$

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2$$

$$yp\,dp = p^2dy$$

Получаем уравнение с разделяющимися переменными. Разделим обе части уравнения на (p^2+1) и y:

$$\frac{p\,dp}{p^2} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

Проинтегрируем обе части уравнения

$$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{dy}{y}$$

$$\ell np = \ell ny + \ell nC_1$$

$$p = yC_1$$

Определим значение C_1

$$y'(0) = 1 \quad y(0) = 1$$

$$1 = C_1$$

Тогда

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ell ny = x + C_2$$

$$y = C_2e^x$$

Определим значение C_2, использовав начальные данные. $y(0) = 1$, имеем

$$1 = C_2e^0 \Rightarrow C_2 = 1$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$y = e^x$$

4. Проинтегрировать следующие уравнения.

4.0 $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$

Уравнение вида:
$$P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy = 0$$
Введем обозначения: $P(x, y) = e^x + y + \sin y$; $Q(x, y) = e^y + x + x\cos y$
Тогда
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(e^x + y + \sin y\right)'_y = 1 + \cos y$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(e^y + x + x\cos y\right)'_x = 1 + \cos y$$
Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то исходное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Его общий интеграл находится по формуле:
$$\int_{x_0}^{x} P(x,\ y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ y)dy = C,$$
Тогда
$$\int_{x_0}^{x} \left(e^x + y + \sin y\right)dx + \int_{y_0}^{y} \left(e^y + x_0 + x_0\cos y\right)dy = C_0,$$
Имеем
$$\left(e^x + yx + x\sin y\right)\Big|_{x_0}^{x} + \left(e^y + x_0 y + x_0\sin y\right)\Big|_{y_0}^{y} = C_0$$
$$e^x + yx + x\sin y - e^{x_0} - yx_0 - x_0\sin y + e^y + x_0 y + x_0\sin y - e^{y_0} - x_0 y_0 - x_0\sin y_0 = C_0$$
$$e^x + yx + x\sin y - e^{x_0} + e^y - e^{y_0} - x_0 y_0 - x_0\sin y_0 = C_0$$
где $C = C_0 + e^{x_0} + e^{y_0} + x_0 y_0 + x_0\sin y_0$

В итоге:
$$e^x + e^y + xy + x\sin y = C$$

5. Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке равняется ординате этой точки, увеличенной в k раз….

5.0 $A(2, 4)$, $k = 9$

Решение:
Пусть y – искомая кривая
$k=y'(x)$ – угловой коэффициент касательной.
По условию задачи

$$y' = ky$$
$$y' = 9y$$
$$\frac{dy}{dx} = 9y \Rightarrow dy = 9y\,dx$$

Разделим обе части уравнения на y и проинтегрируем их.

$$\int \frac{dy}{y} = \int 9dx$$
$$\ell n y = 9x + \ell n C$$
$$y = Ce^{9x}$$

Так как кривая проходит через точку A(2, 4), то

$$4 = Ce^{9\cdot 2} \Rightarrow 4 = Ce^{18} \Rightarrow C = \frac{4}{e^{18}}$$

Тогда, искомая кривая

$$y = \frac{4}{e^{18}} \cdot e^{9x} = 4e^{9x-18}$$