ИДЗ 11.3 – Вариант 0.

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.0 а) $y'' - 3y = 0$; б) $y'' + 4y' + 13y = 0$; в) $y'' + 5y' - 6y = 0$

а) $y'' - 3y = 0$
Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:

$k^2 - 3 = 0$

$k^2 = 3$

$k_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

Следовательно

$y = C_1 e^{-\sqrt{3}x} + C_2 e^{\sqrt{3}x}$

б) $y'' + 4y' + 13y = 0$
Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:

$k^2 + 4k + 13 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 16 - 4\cdot 1\cdot 13 = 16 - 52 = -36 \qquad (D < 0)$

$k_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; $\quad k_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$;

$\alpha \pm \beta i$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

Так как $\alpha = -2$; $\beta = 3$.

Следовательно

$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

в) $y'' + 5y' - 6y = 0$
Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:

$k^2 + 5k - 6 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 25 + 4\cdot 1\cdot 6 = 49 \qquad (D > 0)$

$k_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; $\quad k_1 = \dfrac{-5+7}{2} = 1$; $\quad k_2 = \dfrac{-5-7}{2} = -6$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

Следовательно

$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-6x}$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения.

2.0 $y'' - y' + 2y = e^x(x^2 - 1)$
Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:
$$k^2 - k + 2 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1 - 8 = -7 \qquad (D<0)$$
$$k_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{7}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i;$$
$$\alpha \pm \beta i$$
Общее решение однородного уравнения для данного вида запишется:
$$\tilde{y} = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$$
Следовательно
$$\tilde{y} = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$$
По функции $f(x) = e^x\left(x^2 - 1\right)$, стоящей в правой части исходного уравнения, записываем структуру его частного решения

$y_{общ} = \tilde{y} + y^*$ где $\tilde{y}$ - общее решение однородного уравнения, y^* – частное решение неоднородного уравнения
Частное решение уравнения будем искать в виде
$$y^* = x^r e^{ax}\left(\tilde{P}_m(x)\cos bx + \tilde{Q}_m(x)\sin bx\right)$$
$$r = 0;\quad a = 1;\quad b = 0$$
Тогда частное решение:
$$y^* = e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right)$$
$$\begin{array}{r|l} 2 & y^* = e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right) \\ -1 & y'^* = e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right) + e^x(2Ax + B) \\ 1 & y''^* = e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right) + 2e^x(2Ax + B) + 2Ae^x \end{array}$$
Подставляем в исходное уравнение:
$$e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right) + 2e^x(2Ax + B) + 2Ae^x - e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right) - e^x(2Ax + B) + 2e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right) \cong$$
$$\cong e^x\left(x^2 - 1\right)$$
$$e^x(2Ax + B) + 2Ae^x + 2e^x\left(Ax^2 + Bx + C\right) \cong e^x\left(x^2 - 1\right)$$
$$2Axe^x + Be^x + 2Ae^x + 2Ax^2e^x + 2Bxe^x + 2Ce^x \cong x^2e^x - e^x$$
$$2Ax^2e^x = x^2e^x \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$
$$2Axe^x + 2Bxe^x = 0 \Rightarrow 2A + 2B = 0 \Rightarrow 1 + 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$
$$Be^x + 2Ae^x + 2Ce^x = -e^x \Rightarrow B + 2A + 2C = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} + 1 + 2C = -1 \Rightarrow 2C = -\frac{3}{2} \Rightarrow C = -\frac{3}{4}$$
Частное решение получим:
$$y^* = e^x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)$$
Общее решение уравнения

$$y_{общ}=e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)+e^x\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения.

3.0 $y''+y=2\cos7x-3\sin7x$
Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:
$$k^2+1=0$$
$$k_{1,2}=i;$$
$$\alpha\pm\beta i$$
$$\alpha=0;\ \beta=1$$
Общее решение однородного уравнения для данного вида запишется:
$$\tilde{y}=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$$
Следовательно
$$\tilde{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$$
По функции $f(x)=2\cos7x-3\sin7x$, стоящей в правой части исходного уравнения, записываем структуру его частного решения

$y_{общ}=\tilde{y}+y^*$ где $\tilde{y}$ - общее решение однородного уравнения, y^* – частное решение неоднородного уравнения
Частное решение уравнения будем искать в виде
$$y^*=x^re^{ax}\left(\tilde{P}_m(x)\cos bx+\tilde{Q}_m(x)\sin bx\right)$$
$$r=0;\quad a=0;\quad b=7$$
Тогда частное решение:
$$y^*=A\cos7x+B\sin7x$$
$$\begin{array}{c|l}1 & y^*=A\cos7x+B\sin7x\\ 0 & y'^*=-7A\sin7x+7B\cos7x\\ 1 & y''^*=-49A\cos7x-49B\sin7x\end{array}$$
Подставляем в исходное уравнение:
$$-49A\cos7x-49B\sin7x+A\cos7x+B\sin7x=2\cos7x-3\sin7x$$
$$-48A\cos7x-48B\sin7x=2\cos7x-3\sin7x$$
Найдем значения коэффициентов A, B:
$$-48A\cos7x=2\cos7x\Rightarrow-48A=2\Rightarrow A=-\frac{1}{24}$$
$$-48B\sin7x=-3\sin7x\Rightarrow-48B=-3\Rightarrow B=\frac{1}{16}$$
Частное решение, получим:
$$y^*=-\frac{1}{24}\cos7x-\frac{1}{16}\sin7x$$
Общее решение уравнения
$$y_{общ}=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{24}\cos7x+\frac{1}{16}\sin7x$$

4. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

4.0 $y'' - 7y' = (x-1)^2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$k^2 - k = 0$$
$$k(k-7) = 0$$
$$k_1 = 0;\ \ k - 7 = 0$$
$$k_2 = 7$$

Общее решение однородного уравнения для данного вида запишется:

$$\tilde{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Следовательно

$$\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{7x}$$

По функции $f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, стоящей в правой части исходного уравнения, записываем структуру его частного решения

$y_{общ} = \tilde{y} + y^*$ где $\tilde{y}$ - общее решение однородного уравнения, y^* – частное решение неоднородного уравнения

Частное решение уравнения будем искать в виде

$$y^* = x^r e^{ax}\left(\tilde{P}_m(x)\cos bx + \tilde{Q}_m(x)\sin bx\right)$$

$$r = 1;\quad a = 0;\quad b = 0$$

Тогда частное решение:

$$y^* = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx \\ -7 & y'^* = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ 1 & y''^* = 6Ax + 2B \end{array}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$6Ax + 2B - 21Ax^2 - 14Bx - 7C = x^2 - 2x + 1$$

$$-21Ax^2 = x^2 \Rightarrow -21A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{21}$$

$$6Ax - 14Bx = -2x \Rightarrow 6A - 14B = -2 \Rightarrow -\frac{6}{21} - 14B = -2 \Rightarrow -14B = -2 + \frac{2}{7} \Rightarrow -14B = -\frac{12}{7} \Rightarrow B = \frac{6}{49}$$

$$2B - 7C = 1 \Rightarrow \frac{12}{49} - 7C = 1 \Rightarrow -7C = 1 - \frac{12}{49} \Rightarrow -7C = \frac{37}{49} \Rightarrow C = -\frac{37}{343}$$

Частное решение получим:

$$y^* = -\frac{1}{21}x^3 + \frac{6}{49}x^2 - \frac{37}{343}x$$

Общее решение уравнения

$$y_{общ} = C_1 + C_2 e^{7x} - \frac{1}{21}x^3 + \frac{6}{49}x^2 - \frac{37}{343}x$$

Учитывая начальные условия: $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

$$y'_{общ} = 7C_2 e^{7x} - \frac{3}{21}x^2 + \frac{12}{49}x - \frac{37}{343} = 7C_2 e^{7x} - \frac{2}{7}x^2 + \frac{12}{49}x - \frac{37}{343}$$

5. Определить и записать структуру частного решения y* линейного неоднородного дифференциального уравнения по виду функции f(x)

5.0 $y'' - 3y' + 2y = f(x)$; а) $f(x) = x + 1$; б) $f(x) = 10e^{2x}$

Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:

$k^2 - 3k + 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \qquad (D > 0)$

$k_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; $k_1 = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$; $k_2 = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

Общее решение однородного уравнения для данного вида запишется:

$\tilde{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

Следовательно

$\tilde{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$

а) При $f(x) = x + 1$

Частное решение: $\hat{y} = Ax + B$

б) При $f(x) = 10e^{2x}$

Частное решение: $\hat{y} = Axe^{2x}$

Здесь появляется множитель x, сравнивая с общим решением e^{2x}