

**ИДЗ 11.3 – Вариант 0.**

1. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1.0 а)  $y'' - 3y = 0$ ; б)  $y'' + 4y' + 13y = 0$ ; в)  $y'' + 5y' - 6y = 0$

а)  $y'' - 3y = 0$

Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$k^2 - 3 = 0$$

$$k^2 = 3$$

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Следовательно

$$y = C_1 e^{-\sqrt{3}x} + C_2 e^{\sqrt{3}x}$$

б)  $y'' + 4y' + 13y = 0$

Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$k^2 + 4k + 13 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 \quad (D < 0)$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad k_{1,2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i;$$
$$\alpha \pm \beta i$$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Так как  $\alpha = -2$ ;  $\beta = 3$ .

Следовательно

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

в)  $y'' + 5y' - 6y = 0$

Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$k^2 + 5k - 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 + 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 \quad (D > 0)$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad k_1 = \frac{-5+7}{2} = 1; \quad k_2 = \frac{-5-7}{2} = -6$$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Следовательно

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-6x}$$

2. Найти общее решение дифференциального уравнения.

$$2.0 \quad y'' - y' + 2y = e^x(x^2 - 1)$$

Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$k^2 - k + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 \quad (D < 0)$$

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i;$$

$$\alpha \pm \beta i$$

Общее решение однородного уравнения для данного вида запишется:

$$\tilde{y} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Следовательно

$$\tilde{y} = e^{\frac{x}{2}} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x \right)$$

По функции  $f(x) = e^x(x^2 - 1)$ , стоящей в правой части исходного уравнения, записываем структуру его частного решения

$y_{\text{общ}} = \tilde{y} + y^*$  где  $\tilde{y}$  - общее решение однородного уравнения,  $y^*$  - частное решение неоднородного уравнения

Частное решение уравнения будем искать в виде

$$y^* = x^r e^{ax} \left( \tilde{P}_m(x) \cos bx + \tilde{Q}_m(x) \sin bx \right)$$

$$r = 0; \quad a = 1; \quad b = 0$$

Тогда частное решение:

$$\begin{cases} y^* = e^x (Ax^2 + Bx + C) \\ 2 \left| y^* = e^x (Ax^2 + Bx + C) \right. \\ -1 \left| y'^* = e^x (Ax^2 + Bx + C) + e^x (2Ax + B) \right. \\ 1 \left| y''^* = e^x (Ax^2 + Bx + C) + 2e^x (2Ax + B) + 2Ae^x \right. \end{cases}$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$e^x (Ax^2 + Bx + C) + 2e^x (2Ax + B) + 2Ae^x - e^x (Ax^2 + Bx + C) - e^x (2Ax + B) + 2e^x (Ax^2 + Bx + C) \cong$$

$$\cong e^x (x^2 - 1)$$

$$e^x (2Ax + B) + 2Ae^x + 2e^x (Ax^2 + Bx + C) \cong e^x (x^2 - 1)$$

$$2Ax^2 e^x + Be^x + 2Ae^x + 2Ax^2 e^x + 2Bxe^x + 2Ce^x \cong x^2 e^x - e^x$$

$$2Ax^2 e^x = x^2 e^x \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$2Ax e^x + 2Bxe^x = 0 \Rightarrow 2A + 2B = 0 \Rightarrow 1 + 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$Be^x + 2Ae^x + 2Ce^x = -e^x \Rightarrow B + 2A + 2C = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} + 1 + 2C = -1 \Rightarrow 2C = -\frac{3}{2} \Rightarrow C = -\frac{3}{4}$$

Частное решение получим:

$$y^* = e^x \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \right)$$

Общее решение уравнения

Наш сайт: [Fizmathim.ru](http://Fizmathim.ru)

Группа ВКонтакте [https://vk.com/fizmathim\\_reshe](https://vk.com/fizmathim_reshe)

Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**

Решение задач по высшей математике на заказ

$$y_{\text{общ}} = e^{\frac{x}{2}} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x \right) + e^x \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \right)$$

**3.** Найти общее решение дифференциального уравнения.

**3.0**  $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$

Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$k^2 + 1 = 0$$

$$k_{1,2} = i;$$

$$\alpha \pm \beta i$$

$$\alpha = 0; \beta = 1$$

Общее решение однородного уравнения для данного вида запишется:

$$\tilde{y} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Следовательно

$$\tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

По функции  $f(x) = 2\cos 7x - 3\sin 7x$ , стоящей в правой части исходного уравнения, записываем структуру его частного решения

$y_{\text{общ}} = \tilde{y} + y^*$  где  $\tilde{y}$  - общее решение однородного уравнения,  $y^*$  - частное решение неоднородного уравнения

Частное решение уравнения будем искать в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x} \left( \tilde{P}_m(x) \cos bx + \tilde{Q}_m(x) \sin bx \right)$$

$$r = 0; a = 0; b = 7$$

Тогда частное решение:

$$y^* = A \cos 7x + B \sin 7x$$

$$1 \left| y^* = A \cos 7x + B \sin 7x \right.$$

$$0 \left| y^* = -7A \sin 7x + 7B \cos 7x \right.$$

$$1 \left| y^{**} = -49A \cos 7x - 49B \sin 7x \right.$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$-49A \cos 7x - 49B \sin 7x + A \cos 7x + B \sin 7x = 2 \cos 7x - 3 \sin 7x$$

$$-48A \cos 7x - 48B \sin 7x = 2 \cos 7x - 3 \sin 7x$$

Найдем значения коэффициентов А, В:

$$-48A \cos 7x = 2 \cos 7x \Rightarrow -48A = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{24}$$

$$-48B \sin 7x = -3 \sin 7x \Rightarrow -48B = -3 \Rightarrow B = \frac{1}{16}$$

Частное решение, получим:

$$y^* = -\frac{1}{24} \cos 7x - \frac{1}{16} \sin 7x$$

Общее решение уравнения

$$y_{\text{общ}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{24} \cos 7x + \frac{1}{16} \sin 7x$$

4. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

$$4.0 \quad y'' - 7y' = (x - 1)^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$k^2 - k = 0$$

$$k(k - 7) = 0$$

$$k_1 = 0; \quad k - 7 = 0$$

$$k_2 = 7$$

Общее решение однородного уравнения для данного вида запишется:

$$\tilde{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Следовательно

$$\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{7x}$$

По функции  $f(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ , стоящей в правой части исходного уравнения, записываем структуру его частного решения

$y_{\text{общ}} = \tilde{y} + y^*$  где  $\tilde{y}$  - общее решение однородного уравнения,  $y^*$  - частное решение неоднородного уравнения

Частное решение уравнения будем искать в виде

$$y^* = x^r e^{ax} \left( \tilde{P}_m(x) \cos bx + \tilde{Q}_m(x) \sin bx \right)$$

$$r = 1; \quad a = 0; \quad b = 0$$

Тогда частное решение:

$$y^* = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

$$0 \quad \left| \begin{array}{l} y^* = Ax^3 + Bx^2 + Cx \\ -7 \quad y'^* = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ 1 \quad y''^* = 6Ax + 2B \end{array} \right.$$

$$-7 \quad y'^* = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$1 \quad y''^* = 6Ax + 2B$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$6Ax + 2B - 21Ax^2 - 14Bx - 7C = x^2 - 2x + 1$$

$$-21Ax^2 = x^2 \Rightarrow -21A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{21}$$

$$6Ax - 14Bx = -2x \Rightarrow 6A - 14B = -2 \Rightarrow -\frac{6}{21} - 14B = -2 \Rightarrow -14B = -2 + \frac{2}{7} \Rightarrow -14B = -\frac{12}{7} \Rightarrow B = \frac{6}{49}$$

$$2B - 7C = 1 \Rightarrow \frac{12}{49} - 7C = 1 \Rightarrow -7C = 1 - \frac{12}{49} \Rightarrow -7C = \frac{37}{49} \Rightarrow C = -\frac{37}{343}$$

Частное решение получим:

$$y^* = -\frac{1}{21}x^3 + \frac{6}{49}x^2 - \frac{37}{343}x$$

Общее решение уравнения

$$y_{\text{общ}} = C_1 + C_2 e^{7x} - \frac{1}{21}x^3 + \frac{6}{49}x^2 - \frac{37}{343}x$$

Учитывая начальные условия:  $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

$$y'_{\text{общ}} = 7C_2 e^{7x} - \frac{3}{21}x^2 + \frac{12}{49}x - \frac{37}{343} = 7C_2 e^{7x} - \frac{2}{7}x^2 + \frac{12}{49}x - \frac{37}{343}$$

Наш сайт: [Fizmathim.ru](http://Fizmathim.ru)

Группа ВКонтакте [https://vk.com/fizmathim\\_reshe](https://vk.com/fizmathim_reshe)

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

5. Определить и записать структуру частного решения  $y^*$  линейного неоднородного дифференциального уравнения по виду функции  $f(x)$

5.0  $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ ; а)  $f(x) = x + 1$ ; б)  $f(x) = 10e^{2x}$

Составим характеристическое уравнение, найдем его корни:

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \quad (D > 0)$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad k_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad k_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Общее решение однородного уравнения для данного вида запишется:

$$\tilde{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Следовательно

$$\tilde{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$$

а) При  $f(x) = x + 1$

Частное решение:  $\hat{y} = Ax + B$

б) При  $f(x) = 10e^{2x}$

Частное решение:  $\hat{y} = Axe^{2x}$

Здесь появляется множитель  $x$ , сравнивая с общим решением  $e^{2x}$