ИДЗ 11.4 – Вариант 0.

1. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения.

1.0 $y''' + 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -8$

Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$k^3 + 4k = 0$

$k(k^2 + 4) = 0$

$k = 0$

$k^2 + 4 = 0$

$k^2 = -4$

$k = 2i$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$

Находим

$y' = -2C_2 \sin 2x + 2C_3 \cos 2x$

$y'' = -4C_2 \cos 2x - 4C_3 \sin 2x$

Используя начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -8$, составляем систему для определения C_1, C_2, C_3 и решаем ее:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cos 2\cdot 0 + C_3 \sin 2\cdot 0 = 0 \\ -2C_2 \sin 2\cdot 0 + 2C_3 \cos 2\cdot 0 = 4 \\ -4C_2 \cos 2\cdot 0 - 4C_3 \sin 2\cdot 0 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_3 = 4 \\ -4C_2 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + 2 = 0 \\ C_3 = 2 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_3 = 2 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Частное решение исходного уравнения имеет вид

$y = -2 + 2\cos 2x + 2\sin 2x$

2. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами: а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка; б) с помощью характеристического уравнения.

2.0 $\begin{cases} x' = 2x + 9y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

а) Дифференцируем первое уравнение данной системы.
Получаем: $x'' = 2x' + 9y'$. Затем заменяем в последнем уравнении y' его выражением из второго уравнения данной системы: $x'' = 2x' + 9(x + 2y) = 2x' + 9x + 18y$

В последнем уравнении y заменяем выражением $y = \dfrac{x' - 2x}{9}$, найденным из первого уравнения системы.

В итоге приходим к дифференциальному уравнению второго порядка относительно неизвестной функции x(t):

$$x'' = 2x' + 9x + 18\left(\frac{x' - 2x}{9}\right) = 2x' + 9x + 2x' - 4x = 4x' + 5x$$

$$x'' - 4x' - 5x = 0$$

Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$$k^2 - 4k - 5 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 + 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 + 20 = 36 \qquad (D > 0)$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad k_1 = \frac{4+6}{2} = 5; \quad k_2 = \frac{4-6}{2} = -1$$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$$

Следовательно

$$x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}$$

Отсюда находим

$$x' = 5C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t}$$

Подставляя полученные выражения для x и x' в $y = \dfrac{x' - 2x}{9}$

$$y = \frac{5C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t} - 2C_1 e^{5t} - 2C_2 e^{-t}}{9} = \frac{3C_1 e^{5t} - 3C_2 e^{-t}}{9} = \frac{1}{3} C_1 e^{5t} - \frac{1}{3} C_2 e^{-t}$$

Следовательно, искомым решением являются функции

$$\begin{cases} x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} \\ y = \dfrac{1}{3} C_1 e^{5t} - \dfrac{1}{3} C_2 e^{-t} \end{cases}$$

б) Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 9 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = (2-k)(2-k) - 9 = 4 - 2k - 2k + k^2 - 9 = k^2 - 4k - 5 = 0$$

Корни уравнения $k_1 = 5; k_2 = -1$

Так как характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, то общее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \lambda_1 e^{k_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{k_2 t} \\ y(t) = C_1 \mu_1 e^{k_1 t} + C_2 \mu_2 e^{k_2 t} \end{cases}$$

Коэффициенты в показателях экспонент $k_1; k_2$ нам уже известны, осталось найти коэффициенты $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$

Корню $k_1 = 5$ соответствует система для вычисления

$$\begin{vmatrix} 2-5 & 9 \\ 1 & 2-5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3\lambda_1 + 9\mu_1 = 0 \\ \lambda_1 - 3\mu_1 = 0 \end{cases}$$

Из обоих уравнений следует одно и то же равенство: $\mu_1 = \frac{1}{3}\lambda_1$

Теперь нужно подобрать наименьшее значение λ_1.

При $\lambda_1 = 1;\ \ \mu_1 = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}$

Корню $k_2 = -1$ соответствует система для вычисления

$$\begin{vmatrix} 2+1 & 9 \\ 1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ или } \begin{cases} 3\lambda_2 + 9\mu_2 = 0 \\ \lambda_2 + 3\mu_2 = 0 \end{cases}$$

Из обоих уравнений следует одно и то же равенство: $\mu_2 = -\frac{1}{3}\lambda_2$

При $\lambda_2 = 1;\ \ \mu_2 = -\frac{1}{3}$

В итоге получаем:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{3} C_1 e^{5t} - \frac{1}{3} C_2 e^{-t} \end{cases}$$

3. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных.

3.0 $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\cdot \frac{1}{e^x + 2}$

Решаем соответствующее однородное уравнение:

$k^2 + 3k + 2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 9 - 4\cdot 1\cdot 2 = 9 - 8 = 1 \qquad (D > 0)$

$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};\quad k_1 = \frac{-3+1}{2} = -1;\quad k_1 = \frac{-3-1}{2} = -2$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$\tilde{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

Следовательно

$\tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

Считаем, что C_1 и C_2 - функции от x, т.е.

$y = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{-2x}$

Определяем $C_1(x)$ и $C_2(x)$ из системы

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases}$$

Которая, для данного уравнения имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^{-2x}=0 \\ -C_1'(x)e^{-x}-2C_2'(x)e^{-2x}=\dfrac{e^{-x}}{e^x+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)+C_2'(x)e^{-x}=0 \\ -C_1'(x)-2C_2'(x)e^{-x}=\dfrac{1}{e^x+2} \end{cases}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & e^{-x} \\ -1 & -2e^{-x} \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 \\ \dfrac{1}{e^x+2} \end{matrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ -1 & -2e^{-x} \end{vmatrix}=-2e^{-x}-(-e^{-x})=-e^{-x}$$

$$\Delta_{C_1}=\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \dfrac{1}{e^x+2} & -2e^{-x} \end{vmatrix}=0-\frac{e^{-x}}{e^x+2}=-\frac{e^{-x}}{e^x+2}; \qquad \Delta_{C_2}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \dfrac{1}{e^x+2} \end{vmatrix}=\frac{1}{e^x+2}$$

Находим $C_2'(x)$, $C_1'(x)$, а затем $C_2(x)$, $C_1(x)$:

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_{C_1}}{\Delta}=-\frac{\dfrac{e^{-x}}{e^x+2}}{-e^{-x}}=\frac{1}{e^x+2}, \qquad C_2'(x)=\frac{\Delta_{C_2}}{\Delta}=\frac{\dfrac{1}{e^x+2}}{-e^{-x}}=-\frac{1}{e^{-x}(e^x+2)}=-\frac{e^x}{(e^x+2)}$$

$$C_1(x)=\int\frac{dx}{e^x+2}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ell n\left|e^x+2\right|+C_1$$

$$C_2(x)=-\int\frac{e^x}{(e^x+2)}=\left|\begin{matrix} e^x+2=t \\ dt=e^x dx \end{matrix}\right|=-\int\frac{dt}{t}=-\ell nt+C_2=-\ell n\left|e^x+2\right|+C_2$$

Следовательно, согласно формуле $y=\tilde{y}+y^*$, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ell n\left|e^x+2\right|+C_1\right)e^{-x}+\left(-\ell n\left|e^x+2\right|+C_2\right)e^{-2x}$$

или $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\dfrac{1}{2}xe^{-x}-\dfrac{1}{2}\ell n\left|e^x+2\right|e^{-x}-\ell n\left|e^x+2\right|e^{-2x}$

4. Решить следующие задачи.

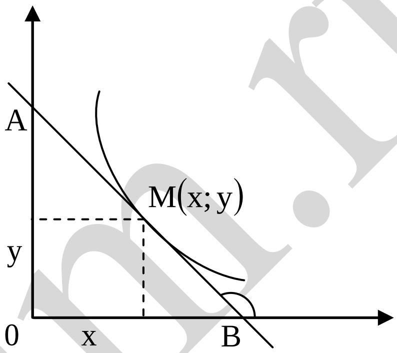
4.0 Записать уравнение кривой, проходящей через точку A(3, 8) и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси ординат любой касательной, равна утроенной абсциссе точки касания.

Решение:

По условию: $|OA| = 3x$

Найдем OA: $|OA| = y - y'x$

Тогда $y - y'x = 3x \Rightarrow y'x - y = -3x \Rightarrow y' - \frac{y}{x} = -3$



Имеем: $y' = u'\upsilon + u\upsilon'$, $y = u\upsilon$

Тогда

$$u'\upsilon + u\upsilon' - \frac{u\upsilon}{x} = -3$$

$$u'\upsilon + u\left(\upsilon' - \frac{\upsilon}{x}\right) = -3 \qquad (1)$$

Находим функцию $\upsilon(x)$ из условия $\upsilon' - \upsilon x = 0$

$$\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{\upsilon}{x} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{d\upsilon}{\upsilon} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ell n\upsilon = \ell nx$$

$$\upsilon = x$$

Подставляем полученное выражение для $\upsilon(x)$ в уравнение (1)

$$u'x = -3$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-3}{x} \Rightarrow du = \frac{-3}{x}dx$$

$$\int du = \int \frac{-3}{x}dx$$

Тогда

$$u = -3\ell nx + C$$

Общее решение:

$$y = x(-3\ell nx + C)$$

Учитываем, что кривая проходит через точку A(3, 8)

$$8 = 3(-3\ell n3 + C) \Rightarrow 8 = -9\ell n3 + 3C \Rightarrow C = \frac{8 + 9\ell n3}{3} \Rightarrow C = \frac{8}{3} + 3\ell n3$$

В итоге $y = x\left(-3\ell nx + \frac{8}{3} + 3\ell n3\right)$ или $y = -3x\ell nx + \left(\frac{8}{3} + 3\ell n3\right)x$