

Наш сайт: Fizmathim.ru

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

ИДЗ 11.4 – Вариант 0.

1. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения.

$$1.0 \quad y'''' + 4y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = -8$$

Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$$k^3 + 4k = 0$$

$$k(k^2 + 4) = 0$$

$$k = 0$$

$$k^2 + 4 = 0$$

$$k^2 = -4$$

$$k = 2i$$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$$

Находим

$$y' = -2C_2 \sin 2x + 2C_3 \cos 2x$$

$$y'' = -4C_2 \cos 2x - 4C_3 \sin 2x$$

Используя начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -8$, составляем систему для определения C_1, C_2, C_3 и решаем ее:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cos 2 \cdot 0 + C_3 \sin 2 \cdot 0 = 0 \\ -2C_2 \sin 2 \cdot 0 + 2C_3 \cos 2 \cdot 0 = 4 \\ -4C_2 \cos 2 \cdot 0 - 4C_3 \sin 2 \cdot 0 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_3 = 4 \\ -4C_2 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + 2 = 0 \\ C_3 = 2 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_3 = 2 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = -2 + 2 \cos 2x + 2 \sin 2x$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами: а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка; б) с помощью характеристического уравнения.

$$2.0 \begin{cases} x' = 2x + 9y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

а) Дифференцируем первое уравнение данной системы.

Получаем: $x'' = 2x' + 9y'$. Затем заменяем в последнем уравнении y' его выражением из второго уравнения данной системы: $x'' = 2x' + 9(x + 2y) = 2x' + 9x + 18y$

В последнем уравнении y заменяем выражением $y = \frac{x' - 2x}{9}$, найденным из первого уравнения системы.

В итоге приходим к дифференциальному уравнению второго порядка относительно неизвестной функции $x(t)$:

$$x'' = 2x' + 9x + 18\left(\frac{x' - 2x}{9}\right) = 2x' + 9x + 2x' - 4x = 4x' + 5x$$

$$x'' - 4x' - 5x = 0$$

Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$$k^2 - 4k - 5 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 16 + 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 + 20 = 36 \quad (D > 0)$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad k_1 = \frac{4+6}{2} = 5; \quad k_2 = \frac{4-6}{2} = -1$$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}$$

Следовательно

$$x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}$$

Отсюда находим

$$x' = 5C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t}$$

Подставляя полученные выражения для x и x' в $y = \frac{x' - 2x}{9}$

$$y = \frac{5C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t} - 2C_1 e^{5t} - 2C_2 e^{-t}}{9} = \frac{3C_1 e^{5t} - 3C_2 e^{-t}}{9} = \frac{1}{3} C_1 e^{5t} - \frac{1}{3} C_2 e^{-t}$$

Следовательно, искомым решением являются функции

$$\begin{cases} x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} \\ y = \frac{1}{3} C_1 e^{5t} - \frac{1}{3} C_2 e^{-t} \end{cases}$$

б) Составляем характеристическое уравнение и решаем его:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 9 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = (2-k)(2-k) - 9 = 4 - 2k - 2k + k^2 - 9 = k^2 - 4k - 5 = 0$$

Корни уравнения $k_1 = 5; k_2 = -1$

Так как характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, то общее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \lambda_1 e^{k_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{k_2 t} \\ y(t) = C_1 \mu_1 e^{k_1 t} + C_2 \mu_2 e^{k_2 t} \end{cases}$$

Коэффициенты в показателях экспонент $k_1; k_2$ нам уже известны, осталось найти коэффициенты

$$\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$$

Корню $k_1 = 5$ соответствует система для вычисления

$$\begin{vmatrix} 2-5 & 9 \\ 1 & 2-5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3\lambda_1 + 9\mu_1 = 0 \\ \lambda_1 - 3\mu_1 = 0 \end{cases}$$

Из обоих уравнений следует одно и то же равенство: $\mu_1 = \frac{1}{3}\lambda_1$

Теперь нужно подобрать наименьшее значение λ_1 .

$$\text{При } \lambda_1 = 1; \quad \mu_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Корню $k_2 = -1$ соответствует система для вычисления

$$\begin{vmatrix} 2+1 & 9 \\ 1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3\lambda_2 + 9\mu_2 = 0 \\ \lambda_2 + 3\mu_2 = 0 \end{cases}$$

Из обоих уравнений следует одно и то же равенство: $\mu_2 = -\frac{1}{3}\lambda_2$

$$\text{При } \lambda_2 = 1; \quad \mu_2 = -\frac{1}{3}$$

В итоге получаем:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} \\ y(t) = \frac{1}{3} C_1 e^{5t} - \frac{1}{3} C_2 e^{-t} \end{cases}$$

3. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных.

$$3.0 \quad y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \cdot \frac{1}{e^x + 2}$$

Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$k^2 + 3k + 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \quad (D > 0)$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad k_1 = \frac{-3+1}{2} = -1; \quad k_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$$

Общее решение однородного уравнения запишется в виде:

$$\tilde{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

Следовательно

$$\tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Считаем, что C_1 и C_2 - функции от x , т.е.

$$y = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) e^{-2x}$$

Определяем $C_1(x)$ и $C_2(x)$ из системы

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0 \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases}$$

Которая, для данного уравнения имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} - 2C_2'(x)e^{-2x} = \frac{e^{-x}}{e^x + 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ -C_1'(x) - 2C_2'(x)e^{-x} = \frac{1}{e^x + 2} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ -1 & -2e^{-x} \end{vmatrix} \frac{0}{e^x + 2}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ -1 & -2e^{-x} \end{vmatrix} = -2e^{-x} - (-e^{-x}) = -e^{-x}$$

$$\Delta_{C_1} = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ \frac{1}{e^x + 2} & -2e^{-x} \end{vmatrix} = 0 - \frac{e^{-x}}{e^x + 2} = -\frac{e^{-x}}{e^x + 2}; \quad \Delta_{C_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{e^x + 2} \end{vmatrix} = \frac{1}{e^x + 2}$$

Находим $C_2'(x)$, $C_1'(x)$, а затем $C_2(x)$, $C_1(x)$:

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_{C_1}}{\Delta} = -\frac{\frac{e^{-x}}{e^x + 2}}{-e^{-x}} = \frac{1}{e^x + 2}, \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_{C_2}}{\Delta} = \frac{\frac{1}{e^x + 2}}{-e^{-x}} = -\frac{1}{e^{-x}(e^x + 2)} = -\frac{e^x}{(e^x + 2)}$$

$$C_1(x) = \int \frac{dx}{e^x + 2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln|e^x + 2| + C_1$$

$$C_2(x) = -\int \frac{e^x}{(e^x + 2)} = \left| \begin{matrix} e^x + 2 = t \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t + C_2 = -\ln|e^x + 2| + C_2$$

Следовательно, согласно формуле $y = \tilde{y} + y^*$, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln|e^x + 2| + C_1 \right) e^{-x} + \left(-\ln|e^x + 2| + C_2 \right) e^{-2x}$$

$$\text{или } y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2} x e^{-x} - \frac{1}{2} \ln|e^x + 2| e^{-x} - \ln|e^x + 2| e^{-2x}$$

4. Решить следующие задачи.

4.0 Записать уравнение кривой, проходящей через точку $A(3, 8)$ и обладающей следующим свойством: длина отрезка, отсекаемого на оси ординат любой касательной, равна утроенной абсциссе точки касания.

Решение:

По условию: $|OA| = 3x$

Найдем OA : $|OA| = y - y'x$

$$\text{Тогда } y - y'x = 3x \Rightarrow y'x - y = -3x \Rightarrow y' - \frac{y}{x} = -3$$

Имеем: $y' = u'v + uv'$, $y = uv$

Тогда

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -3$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -3 \quad (1)$$

Находим функцию $v(x)$ из условия $v' - \frac{v}{x} = 0$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln v = \ln x$$

$$v = x$$

Подставляем полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (1)

$$u'x = -3$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{-3}{x} \Rightarrow du = \frac{-3}{x} dx$$

$$\int du = \int \frac{-3}{x} dx$$

Тогда

$$u = -3 \ln x + C$$

Общее решение:

$$y = x(-3 \ln x + C)$$

Учитываем, что кривая проходит через точку $A(3, 8)$

$$8 = 3(-3 \ln 3 + C) \Rightarrow 8 = -9 \ln 3 + 3C \Rightarrow C = \frac{8 + 9 \ln 3}{3} \Rightarrow C = \frac{8}{3} + 3 \ln 3$$

$$\text{В итоге } y = x\left(-3 \ln x + \frac{8}{3} + 3 \ln 3\right) \text{ или } y = -3x \ln x + \left(\frac{8}{3} + 3 \ln 3\right)x$$

