

ИДЗ 12.1 – Вариант 0.

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму.

$$1.0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 35n - 6}$$

Знаменатель приравняем к нулю, решим квадратное уравнение

$$49n^2 + 35n - 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1225 + 4 \cdot 6 \cdot 49 = 1225 + 1176 = 2401$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad n_1 = \frac{-35 + 49}{2 \cdot 49} = \frac{14}{98} = \frac{1}{7}; \quad n_2 = \frac{-35 - 49}{2 \cdot 49} = -\frac{84}{98} = -\frac{6}{7}$$

Тогда ряд можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 35n - 6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{\left(n - \frac{1}{7}\right)\left(n + \frac{6}{7}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(7n-1)(7n+6)}$$

Общий член $a_n = \frac{7}{(7n-1)(7n+6)}$ данного ряда представим в виде суммы простейших дробей:

$$a_n = \frac{7}{(7n-1)(7n+6)} = \frac{A}{7n-1} + \frac{B}{7n+6}$$

Тогда: $7 = A(7n+6) + B(7n-1)$

При $n = -\frac{6}{7}$; $7 = -7B \Rightarrow B = -1$

При $n = \frac{1}{7}$; $7A = 7 \Rightarrow A = 1$

Поэтому $a_n = \frac{1}{7n-1} - \frac{1}{7n+6}$

Найдем сумму первых n членов ряда:

$$S_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{20} + \frac{1}{20} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{6} - \frac{1}{7n+6}$$

Вычислим сумму ряда:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7n+6} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{1}{6}$$

Сумма ряда $S = \frac{1}{6}$, данный ряд сходится

2. Исследовать на сходимость указанные ряды с положительными членами. (2-6)

$$2.0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{3^n} \cdot n}$$

Воспользуемся признаком Д'Аламбера

Пусть для ряда $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n > 0$ (начиная с некоторого $n=n_0$) и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Тогда

1) при $q < 1$ данный ряд сходится;

2) при $q > 1$ данный ряд расходится.

где $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{3^n} \cdot n}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3^{n+1}} \cdot (n+1)}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3^{n+1}} \cdot (n+1)}}{\frac{2^n}{\sqrt{3^n} \cdot n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot \sqrt{3^n} \cdot n}{\sqrt{3^{n+1}} \cdot (n+1) \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2 \cdot \sqrt{3^n} \cdot n}{\sqrt{3^n} \cdot \sqrt{3} \cdot (n+1) \cdot 2^n} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,154 > 1 \text{ ряд расходится} \end{aligned}$$

Ответ: ряд расходится

$$3.0 \sum_{n=1}^{\infty} n^n \arcsin^n \frac{\pi}{3n}$$

Если, начиная с некоторого $n=n_0$, $u_n > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, то

при $q < 1$ ряд сходится, а

при $q > 1$ ряд расходится

при $q = 1$ радикальный признак Коши не применим

Согласно радикальному признаку Коши, имеем:

$$a_n = n^n \arcsin^n \frac{\pi}{3n}$$

Заменяем арксинус эквивалентной величиной $\arcsin \frac{\pi}{3n} \sim \frac{\pi}{3n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n \arcsin^n \frac{\pi}{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \arcsin \frac{\pi}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\pi}{3n} = \frac{\pi}{3} = \frac{3,14}{3} = 1,05 > 1$$

ряд расходится

Ответ: ряд расходится

$$4.0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2 - 1}}$$

Воспользуемся интегральным признаком Коши.

Для этого исследуем несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{3x^2 - 1}} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{xdx}{\sqrt{3x^2 - 1}}$$

Решим неопределенный интеграл:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2 - 1}} = \left| \begin{array}{l} 3x^2 - 1 = t \\ dt = 6xdx \end{array} \right| = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{6} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{t} + C = \frac{1}{3} \sqrt{3x^2 - 1} + C$$

Тогда

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{xdx}{\sqrt{3x^2 - 1}} = \frac{1}{3} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left. \sqrt{3x^2 - 1} \right|_1^{\beta} = \frac{1}{3} \lim_{\beta \rightarrow \infty} (\sqrt{3\beta^2 - 1} - \sqrt{3 \cdot 1^2 - 1}) = \frac{1}{3} (\infty - \sqrt{2}) = \infty$$

Так как интеграл расходится, следовательно, исследуемый ряд тоже расходится

Ответ: ряд расходится

$$5.0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}$$

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Используем предельный признак сравнения $a_n = \frac{n}{n^2 + 4}$, $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^2 + 4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2 + 4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\infty}} = \frac{1}{1 + 0} = 1 \neq 0$$

Таким образом, исследуемый ряд расходится вместе с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Ответ: ряд расходится

$$6.0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - 1}$$

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Используем предельный признак сравнения $a_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n^2 - 1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{2n^2 - 1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, исследуемый ряд сходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Ответ: ряд сходится

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды. (7-8)

$$7.0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-1}}$$

Используем признак Лейбница.

Данный ряд является знакочередующимся.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^{\infty}} = 0 \text{ - условие выполняется}$$

Ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

Воспользуемся признаком Д'Аламбера

$$\text{где } a_n = \frac{1}{3^{n-1}}, a_{n+1} = \frac{1}{3^{n-1+1}} = \frac{1}{3^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1}}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3 \cdot 3^n} = \frac{1}{3} < 1$$

Так как $q < 1$, следовательно, исследуемый ряд сходится

Исходный ряд абсолютно сходится

Ответ: ряд абсолютно сходится

Наш сайт: Fizmathim.ru

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

$$8.0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n}$$

Используем признак Лейбница.

Данный ряд является знакочередующимся.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty} = \left\{ \text{по правилу Лопиталя} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)'}{(n)'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0 - \text{условие выполняется}$$

Ряд сходится по признаку Лейбница.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

Воспользуемся интегральным признаком Коши.

Для этого исследуем несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_1^{\beta} \frac{\ln n}{n} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left. \frac{\ln^2 n}{2} \right|_1^{\beta} = \frac{1}{2} \lim_{\beta \rightarrow \infty} (\ln^2 \beta - \ln^2 1) = \frac{1}{2} \cdot (\infty - 0) = \infty$$

Так как интеграл расходится, следовательно, исследуемый ряд тоже расходится

Исходный ряд условно сходится

Ответ: ряд условно сходится