ИДЗ 12.2 – Вариант 0.

1. Найти область сходимости ряда. (1-3)

1.0. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}}$

Найдем интервал сходимости данного ряда. Используем признак Д'Аламбера:

где $u_n(x)=\frac{x^n}{4^{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}}$, $u_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{4^{n+1+1}\cdot\sqrt[3]{n+1}}=\frac{x^{n+1}}{4^{n+2}\cdot\sqrt[3]{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{4^{n+2}\cdot\sqrt[3]{n+1}}}{\frac{x^n}{4^{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot 4^{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}}{4^{n+2}\cdot\sqrt[3]{n+1}\cdot x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\cdot 4\cdot\sqrt[3]{n}}{16\cdot\sqrt[3]{n+1}}\right|=\frac{1}{4}|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{4}|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{4}|x|$$

Ряд сходится при $\frac{1}{4}|x|<1$, откуда $|x|<4$

Запишем интервал сходимости исследуемого степенного ряда

$-4<x<4$

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала

1) При $x=-4\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{4^{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(-1)^n}{4^n\cdot 4\cdot\sqrt[3]{n}}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$

Используем признак Лейбница

Ряд является знакочередующимся

$$\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Ряд сходится по признаку Лейбница

Исследуем ряд на абсолютную сходимость

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\quad(*)$$

Используем интегральный признак Коши

$$\frac{1}{4}\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{4}\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\lim_{\beta\to\infty}\sqrt[3]{x^2}\Big|_1^{\beta}=\frac{3}{8}\lim_{\beta\to\infty}\left(\sqrt[3]{\beta^2}-\sqrt[3]{1^2}\right)=\frac{3}{8}(\infty-1)=\infty$$

Так как интеграл расходится, следовательно, исследуемый ряд тоже расходится

Следовательно, исходный ряд (*) условно сходится

2) При $x=4\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4^{n+1}\cdot\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{4^n\cdot 4\cdot\sqrt[3]{n}}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ряд расходится по известному выше признаку.

Область сходимости степенного ряда $-4\le x<4$ или $[-4;\ 4)$

Ответ: $[-4;\ 4)$

2.0. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5n-9}$

Найдем интервал сходимости данного ряда. Используем признак Д'Аламбера:

где $u_n(x)=\frac{x^n}{5n-9}$, $u_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{5(n+1)-9}=\frac{x^{n+1}}{5n-4}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{5n-4}}{\frac{x^n}{5n-9}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n\cdot x\cdot(5n-9)}{x^n(5n-4)}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{5n-9}{5n-4}=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n-9}{n}}{\frac{5n-4}{n}}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{9}{n}}{5-\frac{4}{n}}=|x|$$

Ряд сходится при $|x|<1\Rightarrow|x|<1$

Запишем интервал сходимости исследуемого степенного ряда

$-1<x<1$

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала

1) При $x=-1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5n-9}$ (*)

Используем признак Лейбница

Ряд является знакочередующимся

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5n-9}=\frac{1}{\infty}=0$$

Ряд сходится по признаку Лейбница

Исследуем ряд на абсолютную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n-9}$$

Используем интегральный признак Коши

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{5x-9}=\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{dx}{5x-9}=\frac{1}{5}\lim_{\beta\to\infty}\ell n|5x-9|\Big|_1^{\beta}=\frac{1}{5}\lim_{\beta\to\infty}\left(\ell n|5\beta-9|-\ell n|5\cdot1-9|\right)=\frac{1}{5}(\infty-\ell n4)=\infty$$

Так как интеграл расходится, следовательно, исследуемый ряд тоже расходится

Следовательно, исходный ряд (*) условно сходится

2) При $x=1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n-9}$ ряд расходится по известному выше признаку.

Область сходимости степенного ряда $-1\le x<1$ или $[-1;\ 1)$

3.0 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+5)^n \operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$

Найдем интервал сходимости данного ряда. Используем признак Д'Аламбера:

где $u_n(x)=(x+5)^n \operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$, $u_{n+1}(x)=(x+5)^{n+1}\operatorname{tg}\frac{1}{3^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{n+1}\operatorname{tg}\frac{1}{3^{n+1}}}{(x+5)^n\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^n\cdot(x+5)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{3^n\cdot 3}}{(x+5)^n\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}}\right|=|x+5|\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{3^n\cdot 3}}{\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}}$$

При $n\to\infty$, $\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$ стремится к нулю, значит, тангенс можно заменить эквивалентной бесконечно малой величиной $\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}\sim\frac{1}{3^n}$

Тогда

$$|x+5|\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{3^n\cdot 3}}{\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}}=|x+5|\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n\cdot 3}}{\frac{1}{3^n}}=\frac{|x+5|}{3}<1 \text{ условие выполняется}$$

Ряд сходится при $\frac{|x+5|}{3}<1\Rightarrow|x+5|<3$

Запишем интервал сходимости исследуемого степенного ряда

$$-3<x+5<3$$
$$-8<x<-2$$

Исследуем сходимость ряда на концах найденного интервала

1) При $x=-2\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-2+5)^n\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}3^n\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$

$\lim_{n\to\infty}3^n\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}=\lim_{n\to\infty}3^n\cdot\frac{1}{3^n}=1$ ряд расходится, так как не выполняется условие $\lim_{n\to\infty}a^n=0$

2) При $x=-8\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-8+5)^n\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}3^n(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$ (*)

Используем признак Лейбница

Ряд является знакочередующимся

$$\lim_{n\to\infty}3^n\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}=\lim_{n\to\infty}3^n\cdot\frac{1}{3^n}=1\neq 0$$

Ряд расходится по признаку Лейбница

Область сходимости степенного ряда $-8<x<-2$ или $(-8;\ -2)$

4. Разложить в ряд Маклорена функцию f(x). Указать область сходимости полученного ряда к этой функции.

4.0. $f(x) = xe^{-\frac{x}{3}}$

Запишем формулу Маклорена функции $y = f(x)$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Находим производные функции $f(x) = xe^{-\frac{x}{3}}$, $f(0) = 0$

$f'(x) = e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{3}xe^{-\frac{x}{3}}$, $\quad f'(0) = e^{-\frac{0}{3}} - \frac{1}{3}\cdot 0\cdot e^{-\frac{0}{3}} = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} + \frac{1}{9}xe^{-\frac{x}{3}} = -\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{3}} + \frac{1}{9}xe^{-\frac{x}{3}}$; $\quad f''(0) = -\frac{2}{3}e^{-\frac{0}{3}} + \frac{1}{9}\cdot 0e^{-\frac{0}{3}} = -\frac{2}{3}$

$f'''(x) = -\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}} + \frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{27}xe^{-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{27}xe^{-\frac{x}{3}}$; $f'''(0) = \frac{1}{3}e^{-\frac{0}{3}} - \frac{1}{27}\cdot 0e^{-\frac{0}{3}} = \frac{1}{3}$

$f^{IV}(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{27}e^{-\frac{x}{3}} + \frac{1}{81}xe^{-\frac{x}{3}} = -\frac{4}{27}e^{-\frac{x}{3}} + \frac{1}{81}xe^{-\frac{x}{3}}$; $f^{IV}(0) = -\frac{4}{27}e^{-\frac{0}{3}} + \frac{1}{81}\cdot 0e^{-\frac{0}{3}} = -\frac{4}{27}$

$f^{V}(x) = -\frac{4}{27}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}} + \frac{1}{81}e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{243}e^{-\frac{x}{3}} = \frac{5}{81}e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{243}xe^{-\frac{x}{3}}$; $f^{V}(0) = \frac{5}{81}e^{-\frac{0}{3}} - \frac{1}{243}\cdot 0e^{-\frac{0}{3}} = \frac{5}{81}$

Тогда функция запишется в виде:

$$xe^{-\frac{x}{3}} = x - \frac{\frac{2}{3}}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}}{3!}x^3 - \frac{\frac{4}{27}}{4!}x^4 + \frac{\frac{5}{81}}{5!}x^5 + \ldots = x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{162}x^4 + \frac{1}{1944}x^5 + \ldots + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{n+1}}{3^n n!}$$

Найдем интервал сходимости данного ряда. Используем признак Д’Аламбера:

где $u_n(x) = \frac{x^{n+1}}{3^n n!}$, $u_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1+1}}{3^{n+1}(n+1)!} = \frac{x^{n+2}}{3^{n+1}(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+2}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{x^{n+1}}{3^n n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\cdot x^n\cdot x^2\cdot n!}{3^n\cdot 3\cdot x^n\cdot x(n+1)!}\right| = \frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)} =$$

$$= \frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{|x|}{3}\cdot\frac{1}{\infty} = 0$$

Ряд сходится при $|x| < \infty$

$$-\infty < x < \infty$$

5. Вычислить указанную величину приближенно с заданной степенью точности α, воспользовавшись разложением в степенной ряд соответствующим образом подобранной функции

5.0. $\sqrt[3]{27{,}36}$, α=0,001

Применим биномиальное разложение

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$$

Представим радикал в виде $(1+x)^m$

$$\sqrt[3]{27{,}36}=\sqrt[3]{0{,}36+27}=(0{,}36+27)^{\frac{1}{3}}$$

при $m=\frac{1}{3}$, $x=\frac{0{,}36}{27}=\frac{0{,}04}{3}$

Тогда

$$\sqrt[3]{27{,}36}=\sqrt[3]{27\left(1+\frac{0{,}04}{3}\right)}=3\sqrt[3]{1+\frac{0{,}04}{3}}=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{0{,}04}{3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}\cdot\left(\frac{0{,}04}{3}\right)^2+\ldots=$$

$$=1+\frac{0{,}04}{9}-\frac{0{,}0032}{162}\ldots=1+0{,}0044-(0{,}0000197)=1{,}0044$$

Поскольку уже третий член можно отбросить в силу того, что он меньше α=0,001. Следовательно

$$\sqrt[3]{27{,}36}=3\sqrt[3]{1+\frac{0{,}04}{3}}=3\cdot 1{,}0044\approx 3{,}013$$

6. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

6.0. $\int_0^1 x\cos x dx$

Воспользуемся разложением функции y = cosx в степенной ряд

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Запишем функцию в ряд

$$x\cos x = x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\right)=x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\frac{x^7}{6!}+\frac{x^9}{8!}-\ldots$$

Решим интеграл

$$\int_0^1 x\cos x dx=\int_0^1\left(x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\frac{x^7}{6!}+\frac{x^9}{8!}-\ldots\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{1}{24}\cdot\frac{x^6}{6}-\frac{1}{720}\cdot\frac{x^8}{8}+\frac{1}{40320}\cdot\frac{x^{10}}{10}-\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\left(\frac{1^2}{2}-\frac{1^4}{8}+\frac{1^6}{144}-\frac{1^8}{5760}+\frac{1^{10}}{403200}-\ldots\right)=0{,}5-0{,}125+0{,}0069-(0{,}000173)\ldots$$

Так как $\frac{1^8}{5760}<0{,}001$, тогда

$$\int_0^1 x\cos x dx = 0{,}5 - 0{,}125 + 0{,}0069 \approx 0{,}382$$

7. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения)

7.0. $y' = x + y^3 + y,\ \ y(0) = 1$

Точка x=0 не является особой для данного уравнения, поэтому его решение можно искать в виде ряда:

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \qquad (*)$$

Имеем: $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0 + 1^3 + 1 = 2$

Дифференцируем исходное уравнение:

$$y'' = 1 + 3y^2y' + y', \qquad y''(0) = 1 + 3\cdot 1^2\cdot 2 + 2 = 1 + 6 + 2 = 9$$

Подставляя найденные значения производных в ряд (*), получаем

$$y = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{9}{2!}x^2 + \ldots = 1 + 2x + \frac{9}{1\cdot 2}x^2 + \ldots$$

В итоге:

$$y = 1 + 2x + \frac{9}{2}x^2 + \ldots$$

8. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

8.0. $y' = 5x^2 - xy,\ y(0) = 0{,}5,\ k = 3$

Точка x=0 не является особой для данного уравнения, поэтому его решение можно искать в виде ряда:

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots \qquad (*)$$

Имеем: $y(0) = 0{,}5;\ \ y'(0) = 5\cdot 0^2 - 0\cdot 0{,}5^2 = 0$

Дифференцируем исходное уравнение:

$$y'' = 10x - y - xy', \qquad y''(0) = 10\cdot 0 - 0{,}5 - 0\cdot 0 = -0{,}5$$

$$y''' = 10 - 2y' - xy'', \qquad y'''(0) = 10 - 2\cdot 0 - 0\cdot(-0{,}5) = 10$$

Подставляя найденные значения производных в ряд (*), получаем

$$y = 0{,}5 + \frac{0}{1!}x + \frac{-0{,}5}{2!}x^2 + \frac{10}{3!}x^3 + \ldots = 0{,}5 - \frac{0{,}5}{1\cdot 2}x^2 + \frac{10}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$$

В итоге:

$$y = 0{,}5 - 0{,}25x^2 + 1{,}667x^3 + \ldots$$