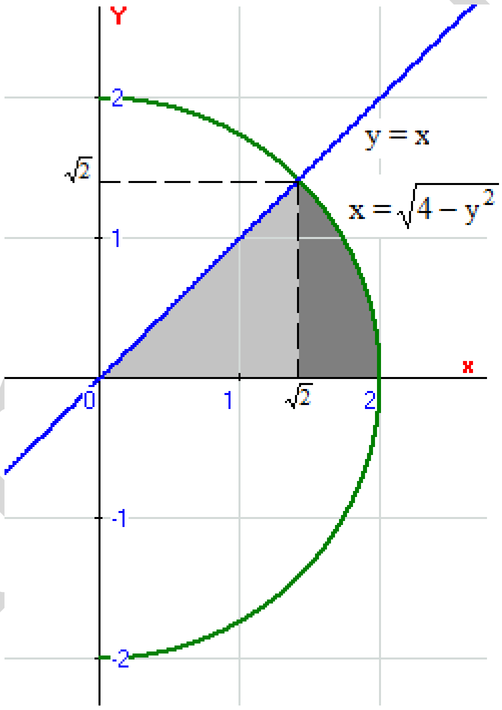
ИДЗ 13.1 – Вариант 0

1. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и внешним интегрированием по y, если область D задана указанными линиями.

1.0. D: $y = x,\ x = \sqrt{4-y^2},\ y \geq 0.$

Область ограничена полукругом $x = \sqrt{4-y^2}$ и прямой $y = x$



Найдем ординаты точек пересечения графиков

$\sqrt{4-y^2} = y \Rightarrow 4-y^2 = y^2$

$2y^2 = 4$

$y^2 = 2$

$y_1 = \sqrt{2};\quad y_2 = -\sqrt{2}$

Так как по условию задано $y \geq 0$

Тогда берем во внимание $y = \sqrt{2};\ x = \sqrt{2}$

$y = \sqrt{4-x^2}$, $y = x$

$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

Интеграл с внешним интегрированием по y запишется в виде:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

$x = \sqrt{4-y^2}$; $x = y$

С внешним интегрированием по x запишется в виде

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{\sqrt{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

2. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями.

2.0. $\iint\limits_D xy^2dxdy$, D: y = x, y = 0, x + y = 2

Область D изобразим на рисунке. Если выбрать внутреннее интегрирование по y, а внешнее – по x, то двойной интеграл по этой области выразится одним повторным интегралом

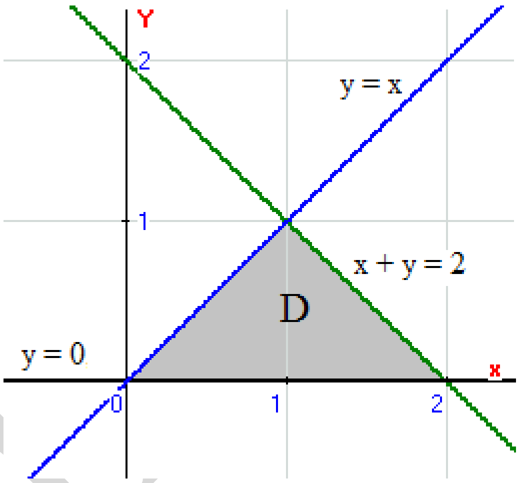
y = x, y = 2 – x

Найдем абсциссы точек пересечения графиков

$x = 0 \Rightarrow x = 0$

$0 = 2 - x \Rightarrow x = 2$

$x = 2 - x \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$



Вычисляем двойной интеграл по области D

$$\iint\limits_D xy^2dxdy = \int_0^1 dx\int_0^x xy^2dy + \int_1^2 dx\int_0^{2-x} xy^2dy = \int_0^1 dx\cdot\left(\frac{xy^3}{3}\right)\Bigg|_0^x + \int_1^2 dx\cdot\left(\frac{xy^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x} = \int_0^1\left(\frac{x\cdot x^3}{3} - \frac{x\cdot 0^3}{3}\right)dx +$$

$$+\int_1^2\left(\frac{x\cdot(2-x)^3}{3} - \frac{x\cdot 0^3}{3}\right)dx = \int_0^1\frac{x^4}{3}dx + \int_1^2\left(\frac{x\cdot\left(8-12x+6x^2-x^3\right)}{3}\right)dx = \int_0^1\frac{x^4}{3}dx + \int_1^2\left(\frac{8x}{3} - 4x^2 + 2x^3 - \frac{x^4}{3}\right)dx =$$

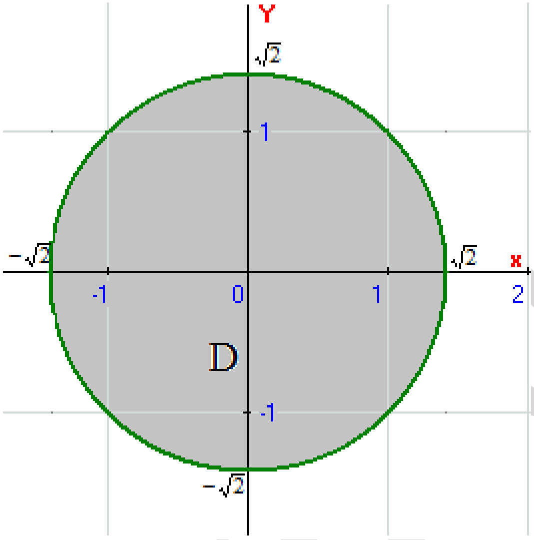
$$= \frac{x^5}{3\cdot 5}\Bigg|_0^1 + \left(\frac{8x^2}{3\cdot 2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{3\cdot 5}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{x^5}{15}\Bigg|_0^1 + \left(\frac{4x^2}{3} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{15}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1^5}{15} - \frac{0^5}{15} +$$

$$+\left(\frac{4\cdot 2^2}{3} - \frac{4\cdot 2^3}{3} + \frac{2^4}{2} - \frac{2^5}{15}\right) - \left(\frac{4\cdot 1^2}{3} - \frac{4\cdot 1^3}{3} + \frac{1^4}{2} - \frac{1^5}{15}\right) = \frac{1}{15} + \frac{16}{3} - \frac{32}{3} + \frac{16}{2} - \frac{32}{15} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{15} =$$

$$= -\frac{16}{3} + 8 - \frac{30}{15} - \frac{1}{2} = \frac{-160+240-60-15}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

3. Вычислить двойной интеграл, используя полярные координаты.

3.0. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy$



Область интегрирования D представляет собой окружность радиуса $R=\sqrt{2}$

Имеем $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2};\ -\sqrt{2-x^2} \le y \le \sqrt{2-x^2}$
$x^2 + y^2 = 2$ – окружность

Перейдем к полярным координатам
$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ x^2+y^2=\rho^2,$
где $0 \le \rho \le \sqrt{2}$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $dxdy = \rho d\rho d\varphi$

Тогда

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho\cdot\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\,d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho\cdot\sqrt{\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}\,d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho\cdot\sqrt{\rho^2}\,d\rho =$$

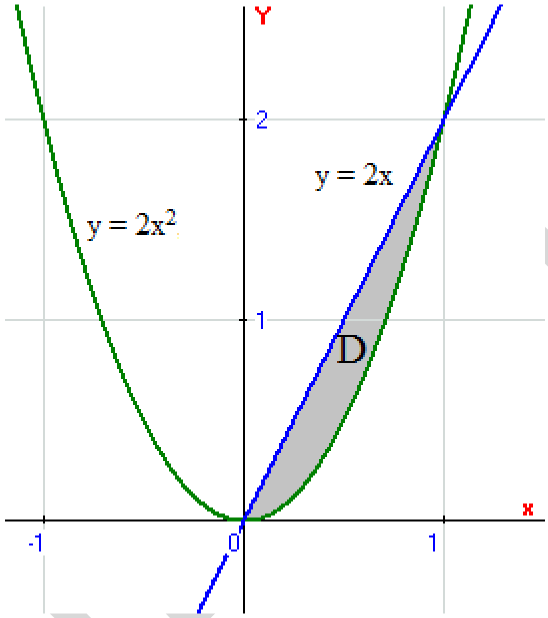
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho\cdot\rho d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cdot\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{\sqrt{2}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cdot\left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right) = \int\limits_0^{2\pi}\frac{2\sqrt{2}}{3}\,d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left.\varphi\right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot(2\pi-0) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$$

4. Вычислить площадь плоской области D, ограниченной заданными линиями.

4.0. D: $y = 2x^2$, $y = 2x$

Область D изобразим на рисунке.
Если выбрать внутреннее интегрирование по y, а внешнее – по x, то двойной интеграл по этой области выразится одним повторным интегралом



Найдем абсциссы точек пересечения графиков

$y = 2x^2;\ \ y = 2x$

$2x^2 = 2x$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x_1 = 0 \qquad\qquad x - 1 = 0$

$\qquad\qquad\qquad x_2 = 1$

При $x_1 = 0;\ \ y_1 = 2 \cdot 0^2 = 0$

При $x_2 = 1;\ \ y_2 = 2 \cdot 1^2 = 2$

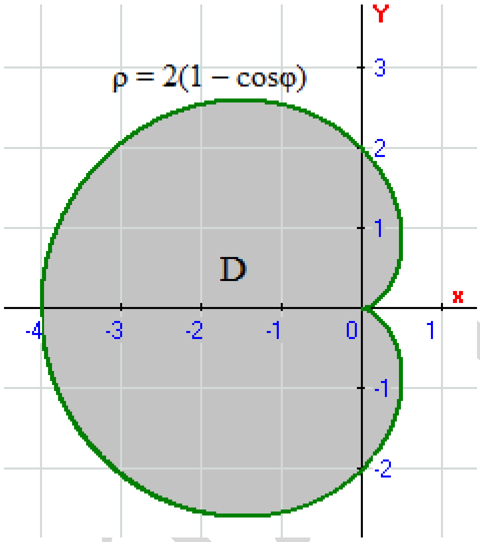
Вычисляем площадь плоской области D

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{2x^2} dy = \int_0^1 dx \cdot y\Big|_x^{2x^2} = \int_0^1 dx \cdot \left(2x^2 - x\right) = \left(\frac{2x^{2+1}}{2+1} - \frac{x^{1+1}}{1+1}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{2 \cdot 1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{2 \cdot 0^3}{3} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

5. С помощью двойных интегралов вычислить в полярных координатах площадь плоской фигуры, ограниченной указанными линиями.

5.0. ρ = 2(1 – cosφ)



Пределы интегрирования
$0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le \rho \le 2(1-\cos\varphi)$; $\rho d\rho d\varphi$

Найдем площадь фигуры

$$S = \iint_D \rho\, d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2(1-\cos\varphi)} \rho\, d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2(1-\cos\varphi)} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left((2(1-\cos\varphi))^2 - 0^2\right) =$$

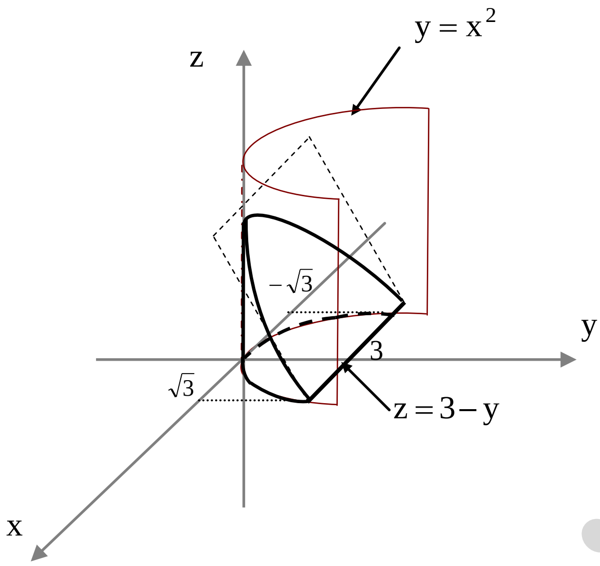
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2^2(1-\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{4}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right) d\varphi = 2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \int_0^{2\pi}(3 - 4\cos\varphi + \cos 2\varphi) d\varphi = \left(3\varphi - 4\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \left(3\cdot 2\pi - 4\sin(2\pi) + \frac{1}{2}\sin(2\pi)\right) - \left(3\cdot 0 - 4\sin(0) + \frac{1}{2}\sin(2\cdot 0)\right) = 3\cdot 2\pi = 6\pi$$

6. Вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

6.0. $y = x^2$, $z = 0$, $y + z = 3$



Данное тело ограничено плоскостью $z = 3 - y$, и параболой $y = x^2$.
На основании геометрического смысла двойного интеграла, искомый объем υ можно вычислить по формуле

$$\upsilon = \iint\limits_D (3-y)dxdy$$

Найдем абсциссы точек пересечения

$$0 = 3 - y \Rightarrow y = 3$$

$$3 = x^2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

$$\upsilon = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2}^{3} (3-y)dy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \cdot \left(3y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{3} = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \cdot \left(3 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} - 3 \cdot x^2 + \frac{\left(x^2\right)^2}{2}\right) =$$

$$= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \cdot \left(9 - \frac{9}{2} - 3x^2 + \frac{x^4}{2}\right) = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{9}{2} - 3x^2 + \frac{x^4}{2}\right)dx = \left(\frac{9}{2}x - \frac{3x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \left(\frac{9}{2}x - x^3 + \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \left(\frac{9}{2} \cdot \sqrt{3} - \left(\sqrt{3}\right)^3 + \frac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{10}\right) - \left(\frac{9}{2} \cdot \left(-\sqrt{3}\right) - \left(-\sqrt{3}\right)^3 + \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^5}{10}\right) = \left(\frac{9\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{10}\right) - \left(-\frac{9}{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{10}\right) =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{10} + \frac{9\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{10} = \frac{18\sqrt{3}}{2} - 6\sqrt{3} + \frac{18\sqrt{3}}{10} = 9\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{5} = 3\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{5} =$$

$$= \frac{15\sqrt{3} + 9\sqrt{3}}{5} = \frac{24\sqrt{3}}{5} \text{ куб.ед.}$$