ИДЗ 13.2 – Вариант 0

1. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, если область V ограничена указанными поверхностями. Начертить область интегрирования

1.0. V: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y = 2$, $z = x^2 + y^2$

Для вычисления тройного интеграла справедлива следующая формула

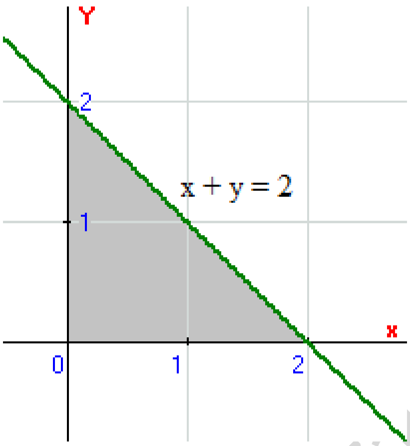
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Тогда согласно данной формуле получаем:

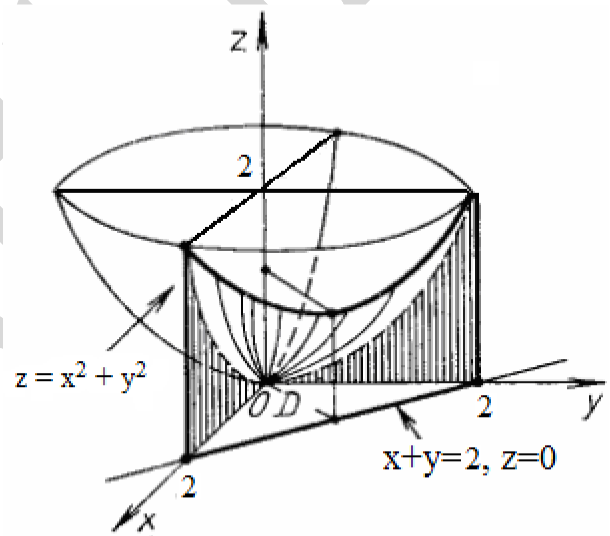
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$$

Данное тело ограничено координатными плоскостями, плоскостью $x + y = 2$, параллельной оси Oz, и параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$.

В проекции на XOY



Область интегрирования

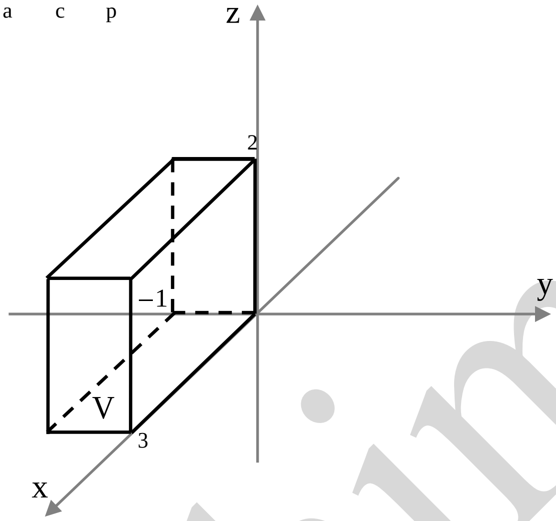


2. Вычислить данные тройные интегралы.

2.0. $\iiint\limits_V xy^2z^2dxdydz$, V: $0 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 0$, $0 \le z \le 2$

Для данной области, на основании формулы

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx\int_c^d dy\int_p^q f(x,y,z)dz$$



Решение тройного интеграла

$$\iiint\limits_V xy^2z^2dxdydz = \int_0^3 dx\int_{-1}^0 dy\int_0^2 xy^2z^2dz = \int_0^3 dx\int_{-1}^0 dy\cdot\frac{xy^2z^3}{3}\Bigg|_0^2 = \int_0^3 dx\int_{-1}^0 dy\cdot\left(\frac{xy^2\cdot 2^3}{3}-\frac{xy^2\cdot 0^3}{3}\right) = \int_0^3 dx\int_{-1}^0 \frac{8xy^2}{3}dy =$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^3 xdx\int_{-1}^0 y^2dy = \frac{8}{3}\int_0^3 xdx\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-1}^0 = \frac{8}{3}\int_0^3 xdx\cdot\left(\frac{0^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{8}{3}\int_0^3 xdx\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{9}\int_0^3 xdx = \frac{8}{9}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^3 = \frac{4x^2}{9}\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{4\cdot 3^2}{9}-\frac{4\cdot 0^2}{9} = \frac{4\cdot 9}{9} = 4$$

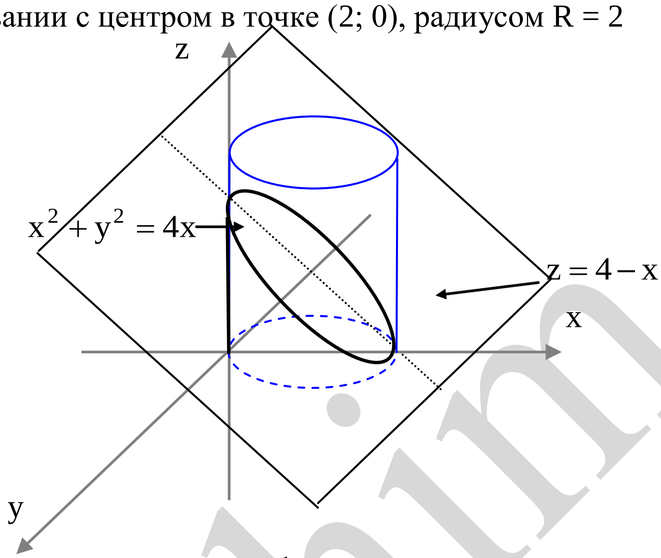
3. Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат.

3.0. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, υ: $x^2 + y^2 = 4x$, $x + z = 4$, $z \geq 0$

$$x^2+y^2-4x+4-4=0$$

$$(x-2)^2+y^2=4$$

Цилиндр с окружностью в основании с центром в точке (2; 0), радиусом R = 2



Перейдем к цилиндрическим координатам ρ, φ, z по формулам, в которых для данной области

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ \ z=z$$

$$x^2+y^2=4x \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=4\rho\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^2=4\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho=4\cos\varphi$$

$$z=4-x \Rightarrow z=4-\rho\cos\varphi$$

где $0 \leq \rho \leq 4\cos\varphi$; $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$; $0 \leq z \leq 4-\rho\cos\varphi$;

$J = \rho$, $dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz$

Получаем:

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi}d\rho\int\limits_0^{4-\rho\cos\varphi}\rho\cdot\sqrt{\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}dz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi}d\rho\int\limits_0^{4-\rho\cos\varphi}\rho\cdot\rho dz=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi}\rho^2d\rho\int\limits_0^{4-\rho\cos\varphi}dz=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi}\rho^2d\rho\cdot z\Bigg|_0^{4-\rho\cos\varphi}=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi}\rho^2d\rho\cdot\left(4-\rho\cos\varphi-0\right)=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi}\rho^2d\rho\cdot\left(4-\rho\cos\varphi\right)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi}\left(4\rho^2-\rho^3\cos\varphi\right)d\rho=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cdot\left(\frac{4}{3}\rho^3-\frac{\rho^4}{4}\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{4\cos\varphi}=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot4^3\cos^3\varphi-\frac{4^4\cos^4\varphi}{4}\cdot\cos\varphi\right)=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cdot\left(\frac{256}{3}\cos^3\varphi-64\cos^5\varphi\right)=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\cdot\cos\varphi\left(\frac{256}{3}\left(1-\sin^2\varphi\right)-64\left(1-\sin^2\varphi\right)^2\right)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\left(\frac{256}{3}-\frac{256}{3}\sin^2\varphi-64+128\sin^2\varphi-64\sin^4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\left(\frac{64}{3}+\frac{128}{3}\sin^2\varphi-64\sin^4\varphi\right)d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{64}{3}+\frac{128}{3}\sin^2\varphi-64\sin^4\varphi\right)d\sin\varphi=$$

$$=\left(\frac{64}{3}\sin\varphi+\frac{128\sin^3\varphi}{9}-\frac{64\sin^5\varphi}{5}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{64}{3}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{128\sin^3\frac{\pi}{2}}{9}-\frac{64\sin^5\frac{\pi}{2}}{5}\right)-$$

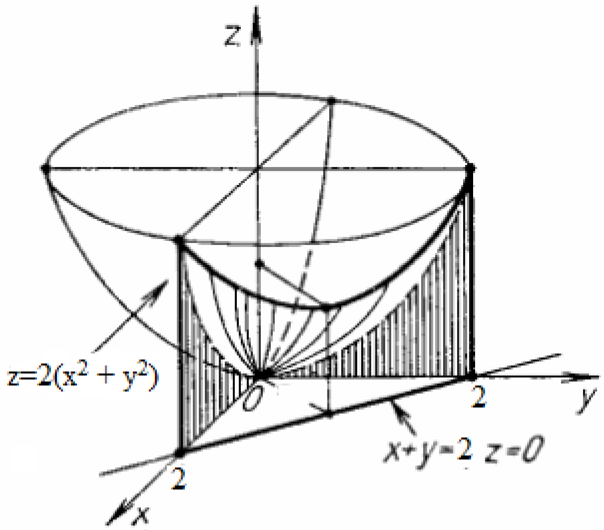
$$-\left(\frac{64}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{128\sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{9}-\frac{64\sin^5\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{5}\right)=\frac{64}{3}+\frac{128}{9}-\frac{64}{5}+\frac{64}{3}+\frac{128}{9}-\frac{64}{5}=\frac{256}{9}+\frac{128}{3}-\frac{128}{5}=$$

$$=\frac{1280+1920-1152}{45}=\frac{2048}{45}$$

4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

4.0. $x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y=2,\ z=2(x^2+y^2)$

Данное тело ограничено координатными плоскостями, плоскостью $x + y = 2$, параллельной оси Oz, и параболоидом вращения $z = 2(x^2 + y^2)$.



где область D ограничена треугольником, лежащим в плоскости Oxy, для которого $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2-x$, следовательно, искомый объем тела равен

$$\iiint\limits_V dxdy\,dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \cdot z\Big|_0^{2(x^2+y^2)} = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \cdot \left(2x^2+2y^2-0\right) = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left(2x^2+2y^2\right) dy =$$

$$= \int_0^2 dx \cdot \left(2x^2 y + \frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2-x} = \int_0^2 dx \cdot \left(2x^2(2-x) + \frac{2(2-x)^3}{3}\right) = \int_0^2 \left(4x^2 - 2x^3 + \frac{2(2-x)^3}{3}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} - \frac{2(2-x)^4}{3\cdot 4}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{(2-x)^4}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{4\cdot 2^3}{3} - \frac{2^4}{2} - \frac{(2-2)^4}{6}\right) -$$

$$-\left(\frac{4\cdot 0^3}{3} - \frac{0^4}{2} - \frac{(2-0)^4}{6}\right) = \frac{32}{3} - 8 + \frac{16}{6} = \frac{32}{3} - 8 + \frac{8}{3} = \frac{40}{3} - 8 = \frac{40-24}{3} = \frac{16}{3}$$