

ИДЗ 13.2 – Вариант 0

1. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, если область V ограничена указанными поверхностями. Начертить область интегрирования

1.0. $V: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y = 2, z = x^2 + y^2$

Для вычисления тройного интеграла справедлива следующая формула

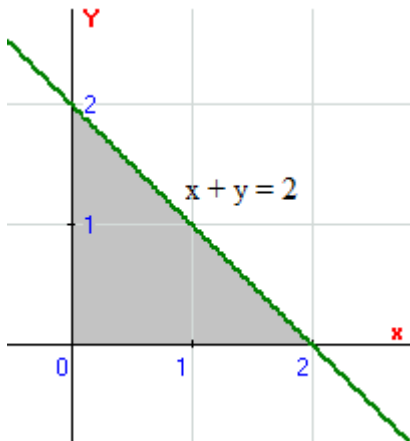
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Тогда согласно данной формуле получаем:

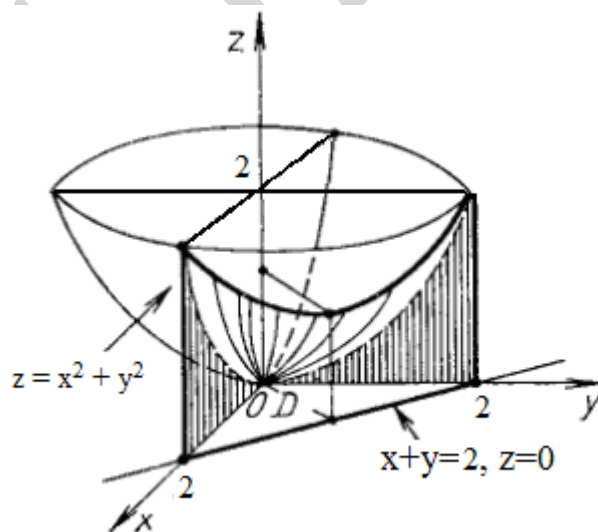
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$$

Данное тело ограничено координатными плоскостями, плоскостью $x + y = 2$, параллельной оси Oz , и параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$.

В проекции на HOY



Область интегрирования

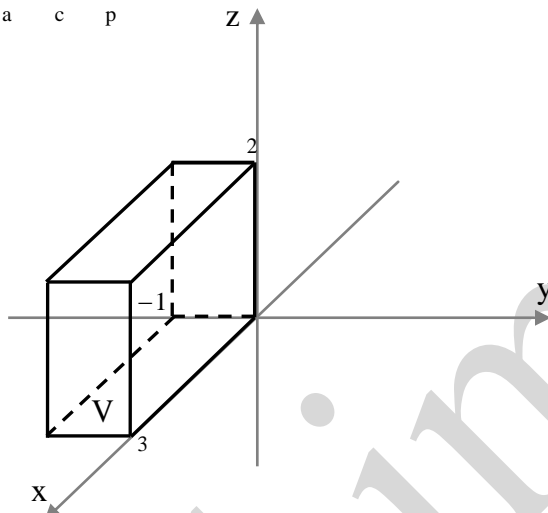


2. Вычислить данные тройные интегралы.

2.0. $\iiint_V xy^2z^2 dx dy dz, V: 0 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 2$

Для данной области, на основании формулы

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x, y, z) dz$$



Решение тройного интеграла

$$\begin{aligned} \iiint_V xy^2z^2 dx dy dz &= \int_0^3 dx \int_{-1}^0 dy \int_0^2 xy^2z^2 dz = \int_0^3 dx \int_{-1}^0 dy \cdot \frac{xy^2z^3}{3} \Big|_0^2 = \int_0^3 dx \int_{-1}^0 dy \cdot \left(\frac{xy^2 \cdot 2^3}{3} - \frac{xy^2 \cdot 0^3}{3} \right) = \int_0^3 dx \int_{-1}^0 \frac{8xy^2}{3} dy = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^3 x dx \int_{-1}^0 y^2 dy = \frac{8}{3} \int_0^3 x dx \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-1}^0 = \frac{8}{3} \int_0^3 x dx \cdot \left(\frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{8}{3} \int_0^3 x dx \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{9} \int_0^3 x dx = \frac{8}{9} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{4x^2}{9} \Big|_0^3 = \\ &= \frac{4 \cdot 3^2}{9} - \frac{4 \cdot 0^2}{9} = \frac{4 \cdot 9}{9} = 4 \end{aligned}$$

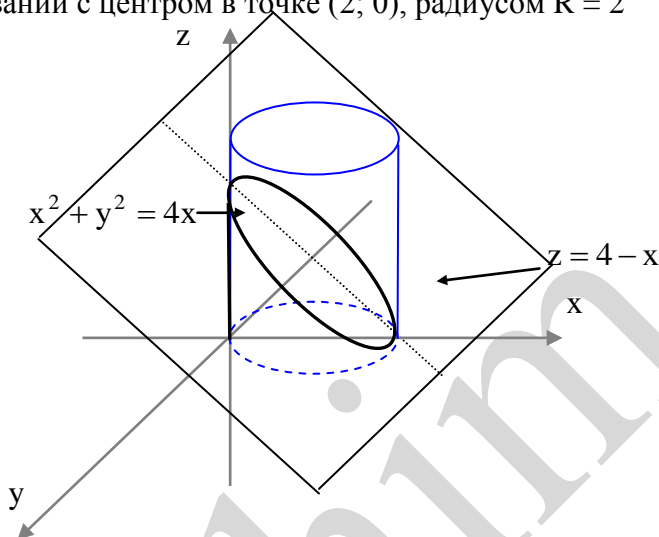
3. Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат.

3.0. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, $v: x^2 + y^2 = 4x, x + z = 4, z \geq 0$

$$x^2 + y^2 - 4x + 4 - 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$

Цилиндр с окружностью в основании с центром в точке (2; 0), радиусом R = 2



Перейдем к цилиндрическим координатам ρ, φ, z по формулам, в которых для данной области $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z$

$$x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 4\rho \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^2 = 4\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = 4 \cos \varphi$$

$$z = 4 - x \Rightarrow z = 4 - \rho \cos \varphi$$

где $0 \leq \rho \leq 4 \cos \varphi; -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2; 0 \leq z \leq 4 - \rho \cos \varphi;$

$$J = \rho, dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz$$

Получаем:

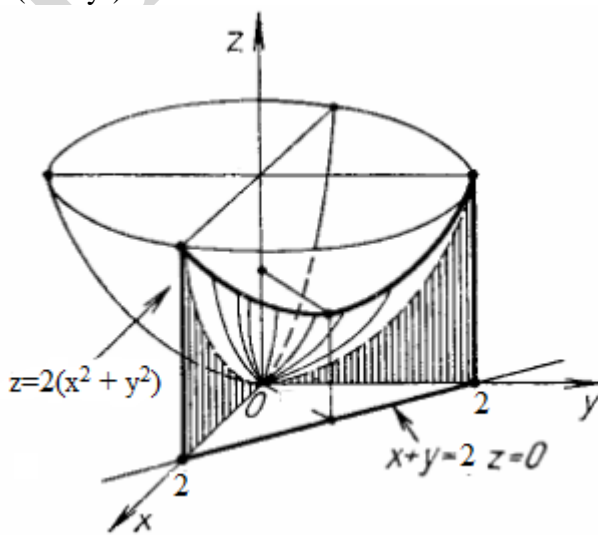
$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} \int_0^{4 - \rho \cos \varphi} \rho \cdot \sqrt{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} \int_0^{4 - \rho \cos \varphi} \rho \cdot \rho dz = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} \rho^2 d\rho \int_0^{4 - \rho \cos \varphi} dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} \rho^2 d\rho \cdot z \Big|_0^{4 - \rho \cos \varphi} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} \rho^2 d\rho \cdot (4 - \rho \cos \varphi - 0) = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} \rho^2 d\rho \cdot (4 - \rho \cos \varphi) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} (4\rho^2 - \rho^3 \cos \varphi) d\rho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cdot \left(\frac{4}{3} \rho^3 - \frac{\rho^4}{4} \cos \varphi \right) \Big|_0^{4 \cos \varphi} = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot 4^3 \cos^3 \varphi - \frac{4^4 \cos^4 \varphi}{4} \cdot \cos \varphi \right) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cdot \left(\frac{256}{3} \cos^3 \varphi - 64 \cos^5 \varphi \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \cos \varphi \left(\frac{256}{3} (1 - \sin^2 \varphi) - 64(1 - \sin^2 \varphi)^2 \right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \left(\frac{256}{3} - \frac{256}{3} \sin^2 \varphi - 64 + 128 \sin^2 \varphi - 64 \sin^4 \varphi \right) d\varphi = \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \left(\frac{64}{3} + \frac{128}{3} \sin^2 \varphi - 64 \sin^4 \varphi \right) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{64}{3} + \frac{128}{3} \sin^2 \varphi - 64 \sin^4 \varphi \right) d \sin \varphi = \\
 &= \left(\frac{64}{3} \sin \varphi + \frac{128 \sin^3 \varphi}{9} - \frac{64 \sin^5 \varphi}{5} \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{64}{3} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{128 \sin^3 \frac{\pi}{2}}{9} - \frac{64 \sin^5 \frac{\pi}{2}}{5} \right) - \\
 &- \left(\frac{64}{3} \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{128 \sin^3 \left(-\frac{\pi}{2} \right)}{9} - \frac{64 \sin^5 \left(-\frac{\pi}{2} \right)}{5} \right) = \frac{64}{3} + \frac{128}{9} - \frac{64}{5} + \frac{64}{3} + \frac{128}{9} - \frac{64}{5} = \frac{256}{9} + \frac{128}{3} - \frac{128}{5} = \\
 &= \frac{1280 + 1920 - 1152}{45} = \frac{2048}{45}
 \end{aligned}$$

4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертеж.

4.0. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y = 2, z = 2(x^2 + y^2)$

Данное тело ограничено координатными плоскостями, плоскостью $x + y = 2$, параллельной оси Oz , и параболоидом вращения $z = 2(x^2 + y^2)$.



где область D ограничена треугольником, лежащим в плоскости Oxy , для которого $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2 - x$, следовательно, искомый объем тела равен

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2(x^2+y^2)} dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \cdot z \Big|_0^{2(x^2+y^2)} = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \cdot (2x^2 + 2y^2 - 0) = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (2x^2 + 2y^2) dy = \\ &= \int_0^2 dx \cdot \left(2x^2 y + \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^{2-x} = \int_0^2 dx \cdot \left(2x^2(2-x) + \frac{2(2-x)^3}{3} \right) = \int_0^2 \left(4x^2 - 2x^3 + \frac{2(2-x)^3}{3} \right) dx = \\ &= \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} - \frac{2(2-x)^4}{3 \cdot 4} \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{(2-x)^4}{6} \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{4 \cdot 2^3}{3} - \frac{2^4}{2} - \frac{(2-2)^4}{6} \right) - \\ &= \left(\frac{4 \cdot 0^3}{3} - \frac{0^4}{2} - \frac{(2-0)^4}{6} \right) = \frac{32}{3} - 8 + \frac{16}{6} = \frac{32}{3} - 8 + \frac{8}{3} = \frac{40}{3} - 8 = \frac{40 - 24}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$