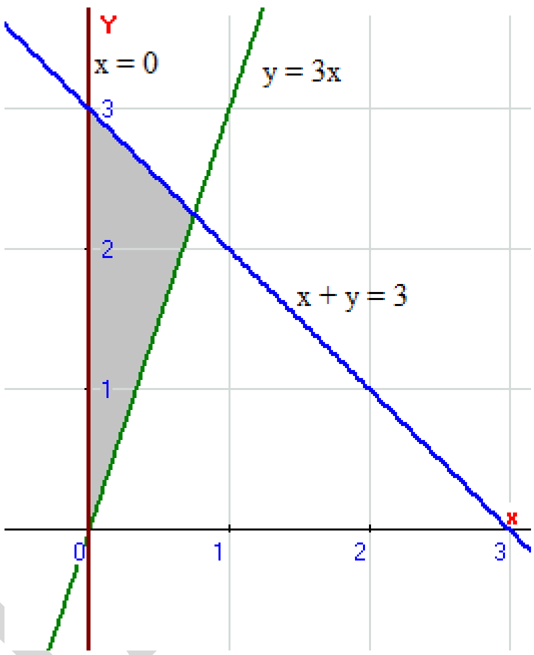
ИДЗ 13.3 – Вариант 0

1. Вычислить массу неоднородной пластины D, ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой ее точке μ= μ(x, y)

1.0. D: x = 0, y = 3x, x + y = 3, μ = 3 – x – y



Для вычисления массы m плоской пластины заданной поверхностной плотностью μ воспользуемся физическим смыслом двойного интеграла

$$m=\iint_D \mu(x,y)dS$$

и формулой $$m=\iint_D (3-x-y)dxdy$$

где область интегрирования D изображена на рис.

Найдем абсциссы точек пересечения

$$3x=3-x\Rightarrow 4x=3\Rightarrow x=\frac{3}{4}$$

Представим записанный двойной интеграл в виде повторного:

$$m=\iint_D (3-x-y)dxdy=\int_0^{\frac{3}{4}}dx\int_{3x}^{3-x}(3-x-y)dy=\int_0^{\frac{3}{4}}dx\cdot\left(3y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{3x}^{3-x}=$$

$$=\int_0^{\frac{3}{4}}dx\cdot\left(3(3-x)-x(3-x)-\frac{(3-x)^2}{2}-\left(3\cdot 3x-x\cdot 3x-\frac{(3x)^2}{2}\right)\right)=$$

$$=\int_0^{\frac{3}{4}}dx\cdot\left(9-3x-3x+x^2-\frac{9-6x+x^2}{2}-9x+3x^2+\frac{9x^2}{2}\right)=\int_0^{\frac{3}{4}}dx\cdot\left(9-6x+x^2-\frac{9}{2}+3x-\frac{x^2}{2}-9x+3x^2+\frac{9x^2}{2}\right)=$$

$$=\int_0^{\frac{3}{4}}\left(\frac{9}{2}+8x^2-12x\right)dx=\left(\frac{9}{2}x+\frac{8x^3}{3}-6x^2\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3-6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)-\left(\frac{9}{2}\cdot 0+\frac{8}{3}\cdot 0^3-6\cdot 0^2\right)=$$

$$=\frac{27}{8}+\frac{9}{8}-\frac{27}{8}=\frac{9}{8}$$

2. Вычислить статический момент однородной пластины D, ограниченной данными линиями, относительно указанной оси, использовав полярные координаты.

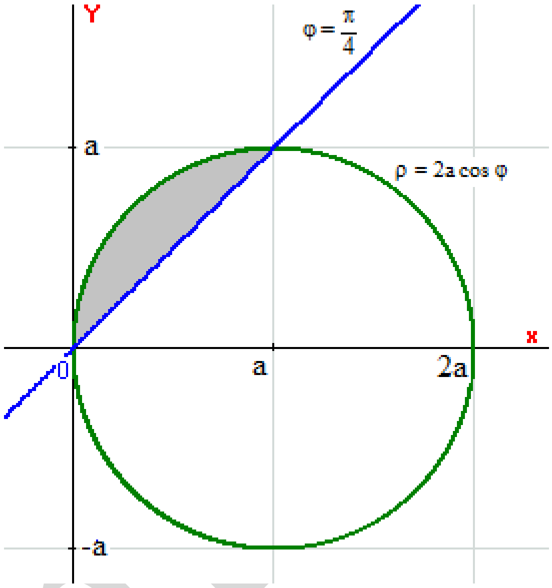
2.0. D: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $x - y \le 0$, Oy

Преобразуем уравнение окружности

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - a^2 + y^2 = 0$$

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$



Получили окружность с центром в точке (a; 0), радиусом R = a
Статический момент пластинки D относительно оси Oy определяется выражением

$$M_y = \iint_D x\mu(x,y)dxdy$$

Перейдем к полярным координатам ρ, φ
В полярной системе координат область D преобразуется в область D'
$x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $x^2 + y^2 = \rho^2$

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0 \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 2a\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2a\rho\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^2 = 2a\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho = 2a\cos\varphi$$

$$x - y \le 0 \Rightarrow \rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi \le 0 \Rightarrow \rho\sin\varphi \le \rho\cos\varphi \Rightarrow tg\varphi \le 1 \Rightarrow \varphi \le \frac{\pi}{4}$$

где $0 \le \rho \le 2a\cos\varphi$; $\pi/4 \le \varphi \le \pi/2$; $dxdy = \rho d\rho d\varphi$; $xdxdy = \rho^2\cos\varphi d\rho d\varphi$

Тогда

$$M_y = \iint_D xdxdy = \iint_{D'} \rho^2\cos\varphi d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \cdot \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2a\cos\varphi} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \cdot \left(\frac{(2a\cos\varphi)^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8a^3\cos^3\varphi}{3} \cdot \cos\varphi d\varphi = \frac{8a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{8a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{8a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{4}\right) d\varphi = \frac{2a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi =$$

$$=\frac{2a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos 4\varphi)\right)d\varphi=\frac{2a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\varphi+\frac{\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{2a^3}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi+2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2a^3}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi+\sin 2\varphi+\frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

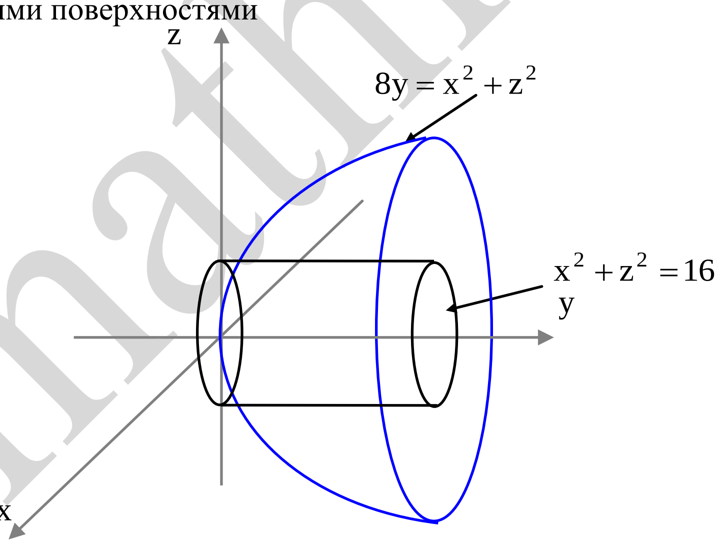
$$=\frac{2a^3}{3}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{8}\right)-\frac{2a^3}{3}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{8}\right)=$$

$$=\frac{2a^3}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi-\frac{2a^3}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi-\frac{2a^3}{3}\cdot 1=\frac{a^3\pi}{2}-\frac{a^3\pi}{4}-\frac{2a^3}{3}=\frac{a^3\pi}{4}-\frac{2a^3}{3}$$

3. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область V, ограниченную указанными поверхностями.

3.0. V: $8y = x^2 + z^2$, $x^2 + z^2 = 16$, $y = 0$

Строим тело, ограниченное данными поверхностями



Так как тело симметричное относительно оси Oy, то можно сразу записать, что $x_C = 0$ и $z_C = 0$
Тогда координата центра масс этого тела определяется по формуле:

$$y_C=\frac{\iiint\limits_V y\,dxdydz}{\iiint\limits_V dxdydz}$$

Величина $M_y=\iiint\limits_V y\,dxdydz$ называется статическим моментом тела относительно координатной плоскости Oxz.
Перейдем к цилиндрическим координатам ρ, φ, y по формулам, в которых для данной области
$x=\rho\cos\varphi,\ \ z=\rho\sin\varphi,\ \ y=y,\ \ x^2+z^2=\rho^2$
Радиус проекции линий пересечения поверхностей

$8y = x^2 + z^2,\ x^2 + z^2 = 16 \Rightarrow \rho^2 = 16 \Rightarrow \rho = 4$

$y = \frac{\rho^2}{8}$

где $0 \le \rho \le 4$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le y \le 1/8\rho^2$;
$J = \rho$, $dxdydz = \rho d\rho d\varphi dy$
Тогда

$$\iiint\limits_V y\,dxdydz = \iiint\limits_{V'} \rho y\,d\rho d\varphi dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 d\rho \int_0^{\frac{\rho^2}{8}} \rho y\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\frac{\rho^2}{8}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \cdot \left(\left(\frac{\rho^2}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{0^2}{2}\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \cdot \frac{\rho^4}{128} = \frac{1}{128}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho^5 d\rho = \frac{1}{128}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left.\frac{\rho^6}{6}\right|_0^4 = \frac{1}{768}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(4^6 - 0^6\right) = \frac{1}{768}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 4096 =$$

$$= \frac{4096}{768}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{16}{3}\left.\varphi\right|_0^{2\pi} = \frac{16}{3}\cdot(2\pi - 0) = \frac{32}{3}\pi$$

$$\iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_{V'} \rho d\rho d\varphi dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 d\rho \int_0^{\frac{\rho^2}{8}} \rho dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \cdot \left. y\right|_0^{\frac{\rho^2}{8}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \cdot \left(\frac{\rho^2}{8} - 0\right) = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^4 = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(\frac{4^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{256}{4} = 8\int_0^{2\pi} d\varphi = 8\varphi\Big|_0^{2\pi} = 8\cdot(2\pi - 0) = 16\pi$$

Следовательно

$$y_C = \frac{\iiint\limits_V y\,dxdydz}{\iiint\limits_V dxdydz} = \frac{\frac{32}{3}\pi}{16\pi} = \frac{2}{3}$$

И центр масс C(0; 2/3; 0)

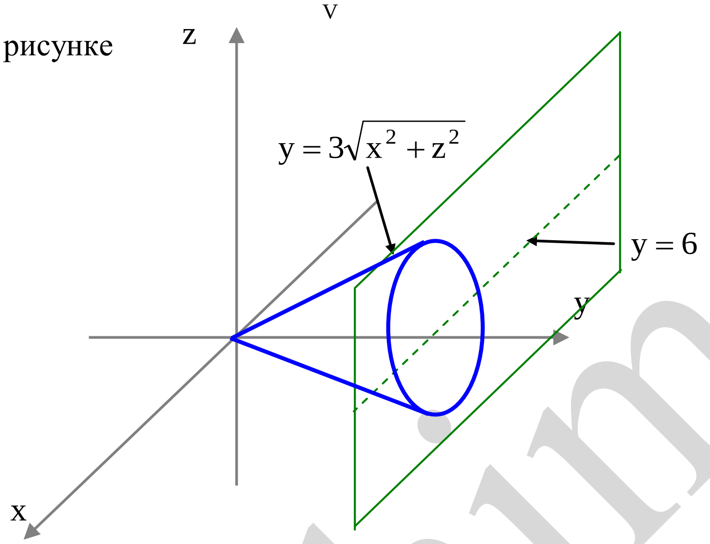
4. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела, занимающего область V, ограниченную данными поверхностями. Плотность тела δ принять равной 1.

4.0. V: $y = 3\sqrt{x^2 + z^2}$, $y = 6$, Oy

Согласно формуле, искомый момент инерции относительно координатной оси Oy

$$I_y = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right)\delta(x, y, z)dxdydz = \delta\iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right)dxdydz$$

Область V изображена на рисунке



По условию следует принять плотность тела δ = 1
Перейдем к цилиндрическим координатам ρ, φ, y по формулам, в которых для данной области

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ z = \rho\sin\varphi,\ \ y = y,\ x^2 + z^2 = \rho^2$$

$$3\sqrt{x^2 + z^2} = y \Rightarrow 3\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = y \Rightarrow 3\rho = y$$

$$6 = 3\sqrt{x^2 + z^2} \Rightarrow \rho = 2$$

где $0 \le \rho \le 2$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $3\rho \le y \le 6$;
$J = \rho$, $dxdydz = \rho d\rho d\varphi dy$
Тогда

$$I_y = \delta\iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right)dxdydz = \iiint\limits_V \rho\cdot\rho^2 d\rho d\varphi dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_{3\rho}^6 \rho^3 dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho \cdot y\Big|_{3\rho}^{6} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho\cdot(6 - 3\rho) = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(2\rho^3 - \rho^4\right)d\rho = 3\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\left(\frac{2\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = 3\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\left(\frac{2^4}{2} - \frac{2^5}{5} - \left(\frac{0^4}{2} - \frac{0^5}{5}\right)\right) =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\left(8 - \frac{32}{5}\right) = 3\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\frac{8}{5} = \frac{24}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{24}{5}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{24}{5}\cdot(2\pi - 0) = \frac{48\pi}{5}$$