

### ИДЗ 13.3 – Вариант 0

1. Вычислить массу неоднородной пластины  $D$ , ограниченной заданными линиями, если поверхностная плотность в каждой ее точке  $\mu = \mu(x, y)$

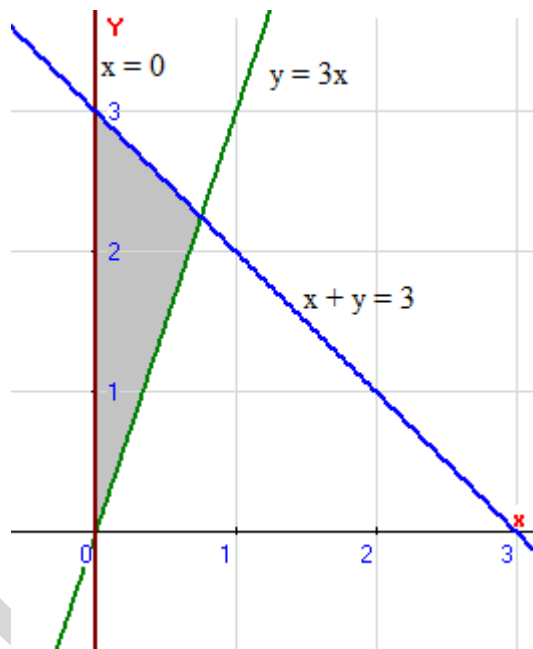
1.0.  $D: x = 0, y = 3x, x + y = 3, \mu = 3 - x - y$

Для вычисления массы  $m$  плоской пластины заданной поверхностной плотностью  $\mu$  воспользуемся физическим смыслом двойного интеграла

$$m = \iint_D \mu(x, y) dS$$

и формулой 
$$m = \iint_D (3 - x - y) dx dy$$

где область интегрирования  $D$  изображена на рис.



Найдем абсциссы точек пересечения

$$3x = 3 - x \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

Представим записанный двойной интеграл в виде повторного:

$$\begin{aligned} m &= \iint_D (3 - x - y) dx dy = \int_0^{\frac{3}{4}} dx \int_{3x}^{3-x} (3 - x - y) dy = \int_0^{\frac{3}{4}} dx \cdot \left( 3y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{3x}^{3-x} = \\ &= \int_0^{\frac{3}{4}} dx \cdot \left( 3(3-x) - x(3-x) - \frac{(3-x)^2}{2} - \left( 3 \cdot 3x - x \cdot 3x - \frac{(3x)^2}{2} \right) \right) = \\ &= \int_0^{\frac{3}{4}} dx \cdot \left( 9 - 3x - 3x + x^2 - \frac{9 - 6x + x^2}{2} - 9x + 3x^2 + \frac{9x^2}{2} \right) = \int_0^{\frac{3}{4}} dx \cdot \left( 9 - 6x + x^2 - \frac{9}{2} + 3x - \frac{x^2}{2} - 9x + 3x^2 + \frac{9x^2}{2} \right) = \\ &= \int_0^{\frac{3}{4}} \left( \frac{9}{2} + 8x^2 - 12x \right) dx = \left( \frac{9}{2}x + \frac{8x^3}{3} - 6x^2 \right) \Bigg|_0^{\frac{3}{4}} = \left( \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{8}{3} \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^3 - 6 \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^2 \right) - \left( \frac{9}{2} \cdot 0 + \frac{8}{3} \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^2 \right) = \\ &= \frac{27}{8} + \frac{9}{8} - \frac{27}{8} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

2. Вычислить статический момент однородной пластины D, ограниченной данными линиями, относительно указанной оси, используя полярные координаты.

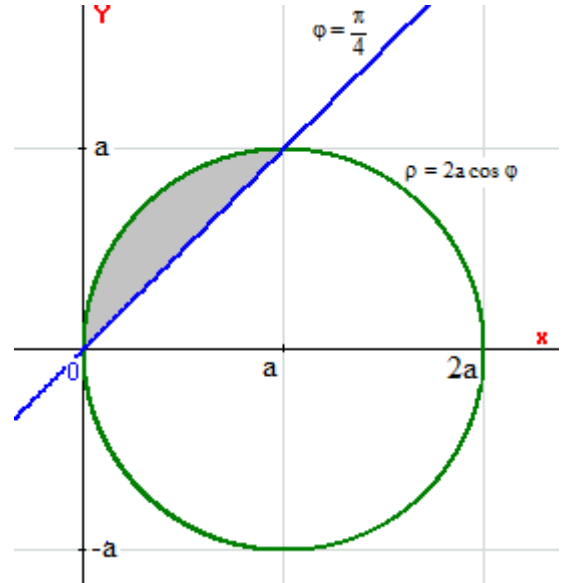
2.0. D:  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ ,  $x - y \leq 0$ , Oy

Преобразуем уравнение окружности

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 - a^2 + y^2 = 0$$

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2$$



Получили окружность с центром в точке (a; 0), радиусом R = a  
Статический момент пластинки D относительно оси Oy определяется выражением

$$M_y = \iint_D x \mu(x, y) dx dy$$

Перейдем к полярным координатам  $\rho$ ,  $\varphi$

В полярной системе координат область D преобразуется в область D'

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 2a\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 2a\rho \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^2 = 2a\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = 2a \cos \varphi$$

$$x - y \leq 0 \Rightarrow \rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi \leq 0 \Rightarrow \rho \sin \varphi \leq \rho \cos \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi \leq 1 \Rightarrow \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\text{где } 0 \leq \rho \leq 2a \cos \varphi; \pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2; dx dy = \rho d\rho d\varphi; x dx dy = \rho^2 \cos \varphi d\rho d\varphi$$

Тогда

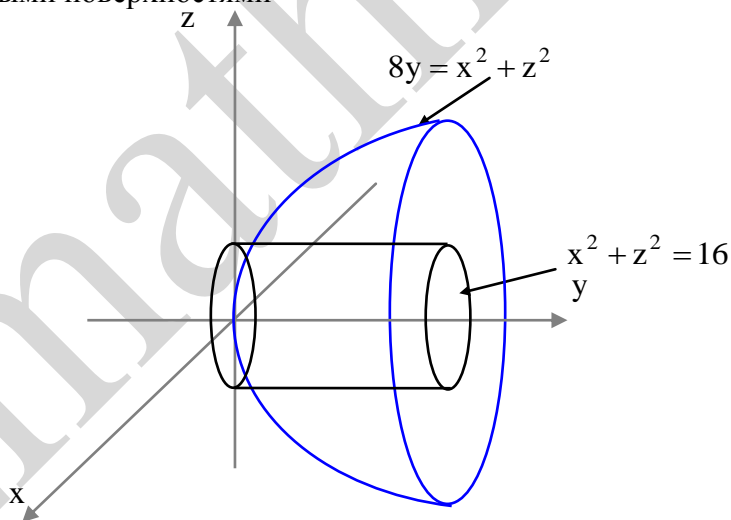
$$\begin{aligned} M_y &= \iint_D x dx dy = \iint_{D'} \rho^2 \cos \varphi d\rho d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} \rho^2 d\rho = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{2a \cos \varphi} = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \cdot \left( \frac{(2a \cos \varphi)^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{8a^3 \cos^3 \varphi}{3} \cdot \cos \varphi d\varphi = \frac{8a^3}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{8a^3}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left( \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \\ &= \frac{8a^3}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left( \frac{1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi}{4} \right) d\varphi = \frac{2a^3}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\varphi) \right) d\varphi = \frac{2a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{3}{2} + 2 \cos 2\varphi + \frac{\cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \\
 &= \frac{2a^3}{3} \left( \frac{3}{2}\varphi + 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 4\varphi}{2} \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a^3}{3} \left( \frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{8} \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{2a^3}{3} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \sin \left( 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\sin \left( 4 \cdot \frac{\pi}{2} \right)}{8} \right) - \frac{2a^3}{3} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + \sin \left( 2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\sin \left( 4 \cdot \frac{\pi}{4} \right)}{8} \right) = \\
 &= \frac{2a^3}{3} \cdot \frac{3}{4} \pi - \frac{2a^3}{3} \cdot \frac{3}{8} \pi - \frac{2a^3}{3} \cdot 1 = \frac{a^3 \pi}{2} - \frac{a^3 \pi}{4} - \frac{2a^3}{3} = \frac{a^3 \pi}{4} - \frac{2a^3}{3}
 \end{aligned}$$

**3.** Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область  $V$ , ограниченную указанными поверхностями.

**3.0.**  $V: 8y = x^2 + z^2, x^2 + z^2 = 16, y = 0$

Строим тело, ограниченное данными поверхностями



Так как тело симметричное относительно оси  $Oy$ , то можно сразу записать, что  $x_C = 0$  и  $z_C = 0$   
Тогда координата центра масс этого тела определяется по формуле:

$$y_C = \frac{\iiint_V y \, dx \, dy \, dz}{\iiint_V dx \, dy \, dz}$$

Величина  $M_y = \iiint_V y \, dx \, dy \, dz$  называется статическим моментом тела относительно координатной плоскости  $Oxz$ .

Перейдем к цилиндрическим координатам  $\rho, \varphi, y$  по формулам, в которых для данной области  $x = \rho \cos \varphi, z = \rho \sin \varphi, y = y, x^2 + z^2 = \rho^2$

Радиус проекции линий пересечения поверхностей

$$8y = x^2 + z^2, \quad x^2 + z^2 = 16 \Rightarrow \rho^2 = 16 \Rightarrow \rho = 4$$

$$y = \frac{\rho^2}{8}$$

где  $0 \leq \rho \leq 4$ ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;  $0 \leq y \leq 1/8\rho^2$ ;

$$J = \rho, \quad dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dy$$

Тогда

$$\begin{aligned} \iiint_V y \, dx dy dz &= \iiint_{V'} \rho y \, d\rho d\varphi dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho \int_0^{\frac{\rho^2}{8}} \rho y \, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\frac{\rho^2}{8}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \cdot \left( \left( \frac{\rho^2}{8} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \cdot \frac{\rho^4}{128} = \frac{1}{128} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho^5 d\rho = \frac{1}{128} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^4 = \frac{1}{768} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot (4^6 - 0^6) = \frac{1}{768} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 4096 = \\ &= \frac{4096}{768} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{16}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{16}{3} \cdot (2\pi - 0) = \frac{32}{3} \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= \iiint_{V'} \rho d\rho d\varphi dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho \int_0^{\frac{\rho^2}{8}} \rho dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \cdot y \Big|_0^{\frac{\rho^2}{8}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho d\rho \cdot \left( \frac{\rho^2}{8} - 0 \right) = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 \rho^3 d\rho = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^4 = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left( \frac{4^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{256}{4} = 8 \int_0^{2\pi} d\varphi = 8\varphi \Big|_0^{2\pi} = 8 \cdot (2\pi - 0) = 16\pi \end{aligned}$$

Следовательно

$$y_C = \frac{\iiint_V y \, dx dy dz}{\iiint_V dx dy dz} = \frac{\frac{32}{3} \pi}{16\pi} = \frac{2}{3}$$

И центр масс  $C(0; 2/3; 0)$

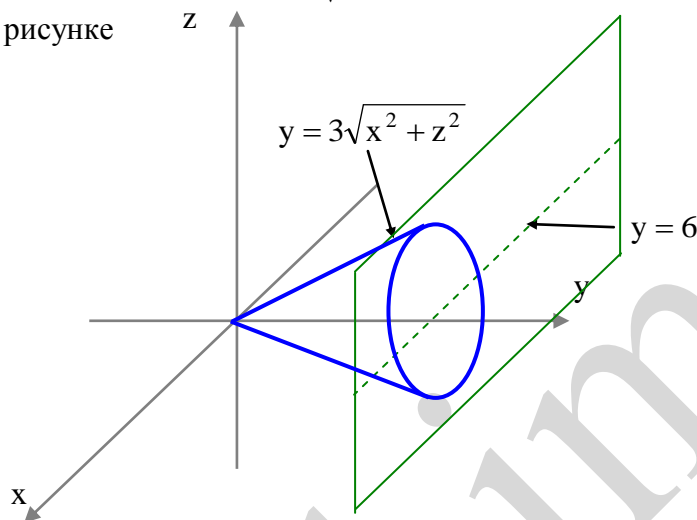
4. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела, занимающего область  $V$ , ограниченную данными поверхностями. Плотность тела  $\delta$  принять равной 1.

4.0.  $V: y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, y = 6, Oy$

Согласно формуле, искомый момент инерции относительно координатной оси  $Oy$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dx dy dz = \delta \iiint_V (x^2 + z^2) dx dy dz$$

Область  $V$  изображена на рисунке



По условию следует принять плотность тела  $\delta = 1$

Перейдем к цилиндрическим координатам  $\rho, \varphi, y$  по формулам, в которых для данной области

$$x = \rho \cos \varphi, z = \rho \sin \varphi, y = y, x^2 + z^2 = \rho^2$$

$$3\sqrt{x^2 + z^2} = y \Rightarrow 3\sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} = y \Rightarrow 3\rho = y$$

$$6 = 3\sqrt{x^2 + z^2} \Rightarrow \rho = 2$$

где  $0 \leq \rho \leq 2; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 3\rho \leq y \leq 6;$

$$J = \rho, dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dy$$

Тогда

$$I_y = \delta \iiint_V (x^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_V \rho \cdot \rho^2 d\rho d\varphi dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_{3\rho}^6 \rho^3 dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho \cdot y \Big|_{3\rho}^6 =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho \cdot (6 - 3\rho) = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2\rho^3 - \rho^4) d\rho = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left( \frac{2\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5} \right) \Big|_0^2 = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left( \frac{2^4}{2} - \frac{2^5}{5} - \left( \frac{0^4}{2} - \frac{0^5}{5} \right) \right) =$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left( 8 - \frac{32}{5} \right) = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{8}{5} = \frac{24}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{24}{5} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{24}{5} \cdot (2\pi - 0) = \frac{48\pi}{5}$$