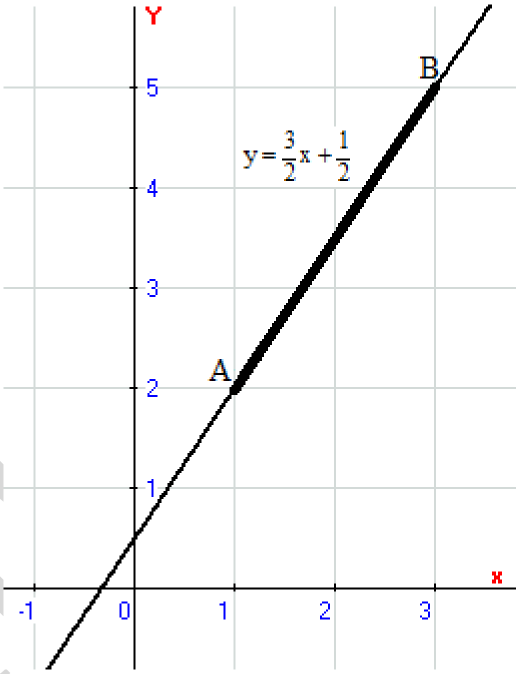
ИДЗ 14.1 – Вариант 0

1. Вычислить данные криволинейные интегралы (1-4)

1.0. $\int\limits_{L_{AB}} (x^2+y)dx + (x+y^2)dy$, где L_{AB} – отрезок прямой, заключенный между точками A(1, 2) и B(3, 5).



Решение:
L_{AB} – отрезок прямой AB, от точки A до точки B
A(1, 2),
B(3, 5)
Используя формулу уравнения прямой проходящей через две точки, запишем

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$$

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{5-2}\Rightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}\Rightarrow 3(x-1)=2(y-2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-3=2y-4\Rightarrow 3x-2y+1=0\Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$$

Путь интегрирования определяется этим уравнением при $1\le x\le 3$. Приняв x за параметр, найдем dy = 3/2dx и подставим в интеграл значения y и dy.

Получаем:

$$\int\limits_{L_{AB}}(x^2+y)dx+(x+y^2)dy=\int\limits_1^3\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx+\left(x+\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot\frac{3}{2}dx=$$

$$=\int\limits_1^3\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx+\frac{3}{2}\cdot\left(x+\frac{9}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)dx=\int\limits_1^3\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{27}{8}x^2+\frac{9}{4}x+\frac{3}{8}\right)dx=$$

$$=\int\limits_1^3\left(\frac{35}{8}x^2+\frac{21}{4}x+\frac{7}{8}\right)dx=\left(\frac{35}{8}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{21}{4}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{7}{8}x\right)\Bigg|_1^3=\left(\frac{35x^3}{24}+\frac{21x^2}{8}+\frac{7}{8}x\right)\Bigg|_1^3=\left(\frac{35\cdot3^3}{24}+\frac{21\cdot3^2}{8}+\frac{7}{8}\cdot3\right)-$$

$$-\left(\frac{35\cdot1^3}{24}+\frac{21\cdot1^2}{8}+\frac{7}{8}\cdot1\right)=\frac{35\cdot9}{8}+\frac{21\cdot9}{8}+\frac{21}{8}-\frac{35}{24}-\frac{21}{8}-\frac{7}{8}=\frac{315}{8}+\frac{189}{8}-\frac{35}{24}-\frac{7}{8}=\frac{315+189-7}{8}-\frac{35}{24}=$$

$$=\frac{497}{8}-\frac{35}{24}=\frac{1491-35}{24}=\frac{1456}{24}=\frac{182}{3}$$

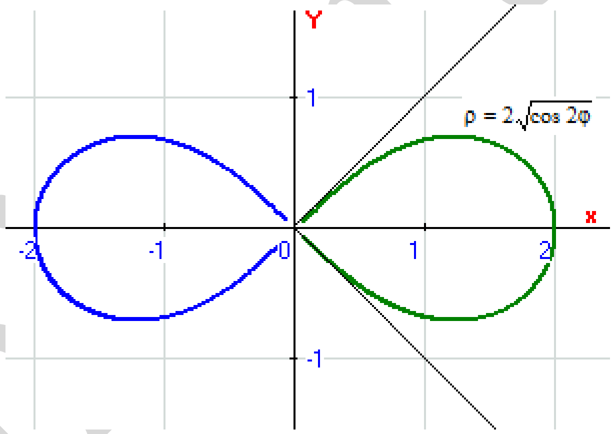
2.0. $\int\limits_L (x+y)d\ell$, где L – первый виток лемнискаты $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$.

Решение

Если уравнение плоской кривой $\rho = \rho(\varphi)$ задано в полярных координатах ρ, φ, функция $\rho(\varphi)$ и ее производная $\rho' = d\rho/d\varphi$ непрерывны, то имеет место частный случай формулы, где в качестве параметра t взят полярный угол φ:

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)d\ell = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} f(\rho(\varphi)\cos(\varphi), \rho(\varphi)\sin(\varphi))\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi$$

φ_A и φ_B – значения φ, определяющие на кривой точки A и B.



Перейдем к полярным координатам:

$x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$

$\rho^2 = 4\cos 2\varphi$ $\rho^2 = 4\cos 2\varphi \Rightarrow \rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$

$$\rho' = \left(2\sqrt{\cos 2\varphi}\right)' = \frac{2}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}\cdot(\cos 2\varphi)' = -\frac{2\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$d\ell = \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi = \sqrt{4\cos 2\varphi + \left(-\frac{2\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2}\,d\varphi =$$

$$= \sqrt{4\cos 2\varphi + \frac{4\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = \sqrt{\frac{4\cos^2 2\varphi + 4\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi$$

Тогда решение криволинейного интеграла примет вид:

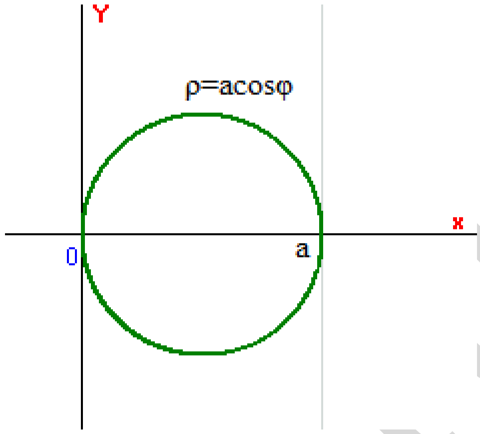
$$\int\limits_L (x+y)d\ell = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\cdot\frac{2}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{\cos 2\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = 4\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi = 4\cdot(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 4\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}\right) -$$

$$-4\cdot\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\cdot\frac{2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

3.0. $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,d\ell$, где L – окружность $x^2 + y^2 = ax$.

Решение:



Введем полярные координаты $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$,
$x^2 + y^2 = \rho^2$

Уравнение окружности $x^2 + y^2 = ax$, преобразуем к виду

$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = a\rho\cos\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = a\rho\cos\varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho^2 = a\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho = a\cos\varphi$

Кривая задана в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\ \beta]$. Для вычисления данного интеграла будем пользоваться формулой:

$$\int\limits_L f(x;y)\,d\ell = \int\limits_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\cdot\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

В нашем случае $\rho(\varphi) = a\cos\varphi;\ \rho'(\varphi) = -a\sin\varphi,\ d\ell = \sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$

$$d\ell = \sqrt{(a\cos\varphi)^2+(-a\sin\varphi)^2}\,d\varphi = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \sqrt{a^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}\,d\varphi = \sqrt{a^2}\,d\varphi = a\,d\varphi$$

Пределы интегрирования $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$

Вычисляем заданный интеграл:

$$\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,d\ell = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\cdot a\,d\varphi = a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\,d\varphi = a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho^2}\,d\varphi = a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho\,d\varphi =$$

$$= a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi\,d\varphi = a^2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi = a^2\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a^2\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right) = a^2(1+1) = 2a^2$$

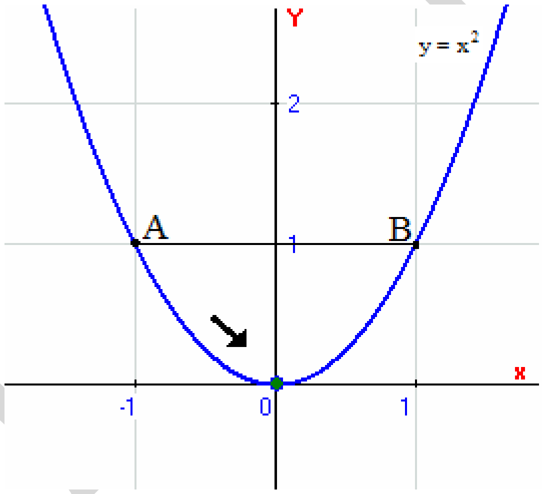
4.0. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$, где L_{AB}: $y = x^2$ от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$.

Решение:
Если кривая L_{AB} лежит в плоскости Oxy и задана уравнением $y = f(x)$, производная $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, $\mathbf{a} = P(x, y)i + Q(x, y)j$, то

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left(P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x)\right)dx$$

Переменная x в данном направлении изменяется от $x_A = -1$ до $x_B = 1$
Вычислим криволинейный интеграл сведением его к определённому:

Путь интегрирования определяется этим уравнением при $-1 \le x \le 1$.
Приняв x за параметр, найдем $y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$ и подставим в интеграл значения y и dy.



Получаем:

$$\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - 2x \cdot x^2\right)dx + \left(\left(x^2\right)^2 - 2x \cdot x^2\right) \cdot 2xdx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - 2x^3\right)dx + \left(x^4 - 2x^3\right) \cdot 2xdx = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{2x^6}{6} - \frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{4x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{2} + \frac{1^6}{3} - \frac{4 \cdot 1^5}{5}\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^4}{2} + \frac{(-1)^6}{3} - \frac{4 \cdot (-1)^5}{5}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{4}{5} = \frac{2}{3} - \frac{8}{5} = \frac{10 - 24}{15} = -\frac{14}{15}$$