

ИДЗ 14.1 – Вариант 0

1. Вычислить данные криволинейные интегралы (1-4)

1.0. $\int_{L_{AB}} (x^2 + y)dx + (x + y^2)dy$, где L_{AB} – отрезок прямой, заключенный между точками $A(1, 2)$ и $B(3, 5)$.

Решение:

L_{AB} – отрезок прямой AB , от точки A до точки B

$A(1, 2)$,

$B(3, 5)$

Используя формулу уравнения прямой проходящей через две точки, запишем

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

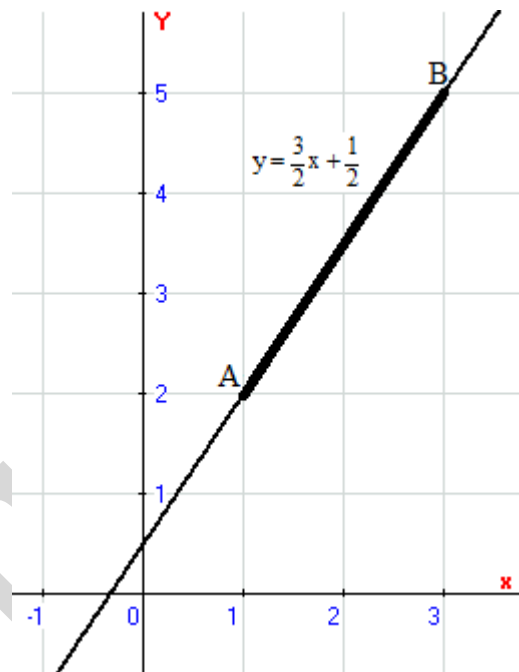
$$\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y - 2}{5 - 2} \Rightarrow \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} \Rightarrow 3(x - 1) = 2(y - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x - 3 = 2y - 4 \Rightarrow 3x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Путь интегрирования определяется этим уравнением при $1 \leq x \leq 3$. Приняв x за параметр, найдем $dy = \frac{3}{2}dx$ и подставим в интеграл значения y и dy .

Получаем:

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} (x^2 + y)dx + (x + y^2)dy &= \int_1^3 \left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx + \left(x + \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \cdot \frac{3}{2} dx = \\ &= \int_1^3 \left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx + \frac{3}{2} \cdot \left(x + \frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \right) dx = \int_1^3 \left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{27}{8}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{3}{8} \right) dx = \\ &= \int_1^3 \left(\frac{35}{8}x^2 + \frac{21}{4}x + \frac{7}{8} \right) dx = \left(\frac{35}{8} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{21}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{7}{8}x \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{35x^3}{24} + \frac{21x^2}{8} + \frac{7}{8}x \right) \Big|_1^3 = \left(\frac{35 \cdot 3^3}{24} + \frac{21 \cdot 3^2}{8} + \frac{7}{8} \cdot 3 \right) - \\ &- \left(\frac{35 \cdot 1^3}{24} + \frac{21 \cdot 1^2}{8} + \frac{7}{8} \cdot 1 \right) = \frac{35 \cdot 9}{8} + \frac{21 \cdot 9}{8} + \frac{21}{8} - \frac{35}{24} - \frac{21}{8} - \frac{7}{8} = \frac{315}{8} + \frac{189}{8} - \frac{35}{24} - \frac{7}{8} = \frac{315 + 189 - 7}{8} - \frac{35}{24} = \\ &= \frac{497}{8} - \frac{35}{24} = \frac{1491 - 35}{24} = \frac{1456}{24} = \frac{182}{3} \end{aligned}$$



2.0. $\int_L (x + y) dl$, где L – первый виток лемнискаты $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$.

Решение

Если уравнение плоской кривой $\rho = \rho(\varphi)$ задано в полярных координатах ρ, φ , функция $\rho(\varphi)$ и ее производная $\rho' = d\rho/d\varphi$ непрерывны, то имеет место частный случай формулы, где в качестве параметра t взят полярный угол φ :

$$\int_{L_{AB}} f(x, y) dl = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} f(\rho(\varphi)\cos(\varphi), \rho(\varphi)\sin(\varphi)) \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$$

φ_A и φ_B – значения φ , определяющие на кривой точки A и B .

Перейдем к полярным координатам:

$$x = \rho\cos\varphi; y = \rho\sin\varphi$$

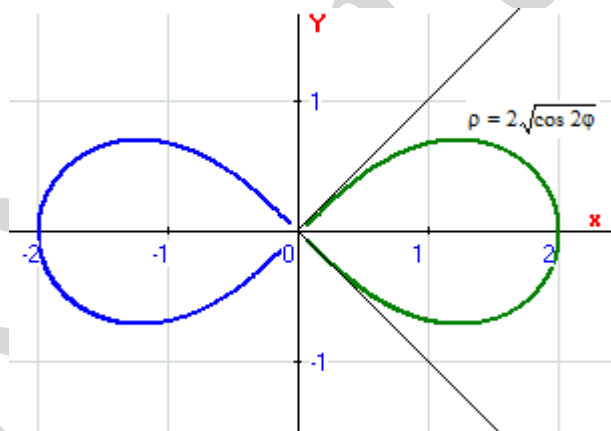
$$\rho^2 = 4\cos 2\varphi \quad \rho^2 = 4\cos 2\varphi \Rightarrow \rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$$

$$\rho' = (2\sqrt{\cos 2\varphi})' = \frac{2}{2\sqrt{\cos 2\varphi}} \cdot (\cos 2\varphi)' = -\frac{2\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \sqrt{4\cos 2\varphi + \left(-\frac{2\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2} d\varphi = \\ &= \sqrt{4\cos 2\varphi + \frac{4\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} d\varphi = \sqrt{\frac{4\cos^2 2\varphi + 4\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}} d\varphi = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi \end{aligned}$$

Тогда решение криволинейного интеграла примет вид:

$$\begin{aligned} \int_L (x + y) dl &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi) \cdot \frac{2}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{\cos 2\varphi}(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi = 4 \cdot (\sin\varphi - \cos\varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 4 \cdot \left(\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} \right) - \\ &- 4 \cdot \left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$



3.0. $\oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = ax$.

Решение:

Введем полярные координаты $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$,
 $x^2 + y^2 = \rho^2$

Уравнение окружности $x^2 + y^2 = ax$, преобразуем к виду

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = a \rho \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = a \rho \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^2 = a \rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = a \cos \varphi$$

Кривая задана в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$,

$\varphi \in [\alpha; \beta]$. Для вычисления данного интеграла будем

пользоваться формулой:

$$\int_L f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \cdot \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2} d\varphi$$

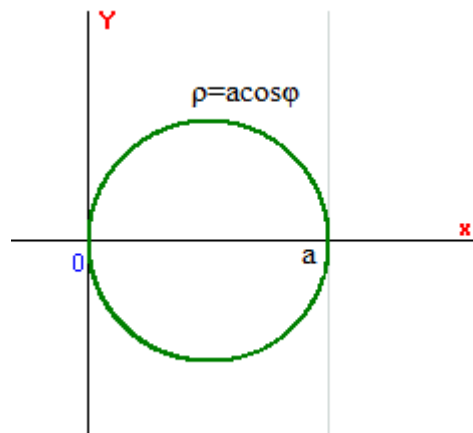
В нашем случае $\rho(\varphi) = a \cos \varphi$; $\rho'(\varphi) = -a \sin \varphi$, $dl = \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + (\rho(\varphi))^2} d\varphi$

$$dl = \sqrt{(a \cos \varphi)^2 + (-a \sin \varphi)^2} d\varphi = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \sqrt{a^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} d\varphi = \sqrt{a^2} d\varphi = a d\varphi$$

Пределы интегрирования $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$

Вычисляем заданный интеграл:

$$\begin{aligned} \oint_L \sqrt{x^2 + y^2} dl &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi} \cdot a d\varphi = a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} d\varphi = a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\rho^2} d\varphi = a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho d\varphi = \\ &= a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos \varphi d\varphi = a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = a^2 \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = a^2 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = a^2 \left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right) = a^2 (1 + 1) = 2a^2 \end{aligned}$$



4.0. $\int_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, где L_{AB} : $y = x^2$ от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$.

Решение:

Если кривая L_{AB} лежит в плоскости Oxy и задана уравнением $y = f(x)$, производная $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, то

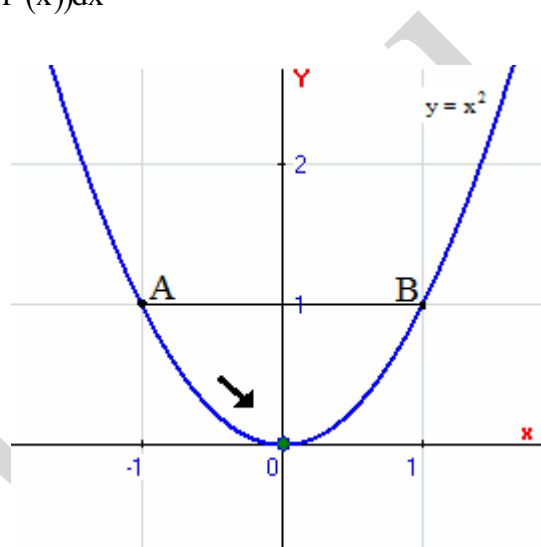
$$\int_{L_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x))dx$$

Переменная x в данном направлении изменяется от $x_A = -1$ до $x_B = 1$

Вычислим криволинейный интеграл сведением его к определённом:

Путь интегрирования определяется этим уравнением при $-1 \leq x \leq 1$.

Приняв x за параметр, найдем $y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$ и подставим в интеграл значения y и dy .



Получаем:

$$\begin{aligned} \int_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_{-1}^1 (x^2 - 2x \cdot x^2)dx + \left((x^2)^2 - 2x \cdot x^2 \right) \cdot 2xdx = \\ &= \int_{-1}^1 (x^2 - 2x^3)dx + (x^4 - 2x^3) \cdot 2xdx = \int_{-1}^1 (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{2x^6}{6} - \frac{4x^5}{5} \right) \Bigg|_{-1}^1 = \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{4x^5}{5} \right) \Bigg|_{-1}^1 = \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{2} + \frac{1^6}{3} - \frac{4 \cdot 1^5}{5} \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^4}{2} + \frac{(-1)^6}{3} - \frac{4 \cdot (-1)^5}{5} \right) = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2}{3} - \frac{8}{5} = \frac{10 - 24}{15} = -\frac{14}{15} \end{aligned}$$