

ИДЗ 14.2 – Вариант 0

1. Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Найти функцию $u(x, y)$

1.0. $(4x^3y^3 - y^2)dx + (3x^4y^2 - 2xy)dy$

Проверим, выполняется ли условие полного дифференциала $\left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ для функции $u(x, y)$. Имеем:

$$P(x, y) = 4x^3y^3 - y^2; \quad Q(x, y) = 3x^4y^2 - 2xy$$

тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^3 - y^2) = (4x^3y^3)'_y - (y^2)'_y = 4x^3 \cdot 3y^{3-1} - 2y^{2-1} = 12x^3y^2 - 2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^4y^2 - 2xy) = (3x^4y^2)'_x - (2xy)'_x = 3 \cdot 4x^{4-1}y^2 - 2y = 12x^3y^2 - 2y$$

Так как выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то данное выражение является полным дифференциалом

функции $u(x, y)$.

Положив $x_0 = 1, y_0 = 1$, по формуле (1) найдем $u(x, y)$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_1^x (4x^3 \cdot 1^3 - 1^2)dx + \int_1^y (3x^4y^2 - 2xy)dy = \int_1^x (4x^3 - 1)dx + \int_1^y (3x^4y^2 - 2xy)dy = \left(\frac{4x^4}{4} - x\right)\Bigg|_1^x + \\ &+ \left(\frac{3x^4y^3}{3} - \frac{2xy^2}{2}\right)\Bigg|_1^y = (x^4 - x)\Bigg|_1^x + (x^4y^3 - xy^2)\Bigg|_1^y = x^4 - x - (1^4 - 1) + (x^4y^3 - xy^2) - (x^4 \cdot 1^3 - x \cdot 1^2) = \\ &= x^4 - x + x^4y^3 - xy^2 - x^4 + x = x^4y^3 - xy^2 + C \end{aligned}$$

Результат верен, если

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

Сделаем проверку:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^4y^3 - xy^2 + C) = (x^4y^3)'_x - (xy^2)'_x = 4x^{4-1}y^3 - y^2 = 4x^3y^3 - y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^4y^3 - xy^2 + C) = (x^4y^3)'_y - (xy^2)'_y = 3x^4y^{3-1} - x \cdot 2y^{2-1} = 3x^4y^2 - 2xy$$

Ответ: $u(x, y) = x^4y^3 - xy^2 + C$

2. Решить следующие задачи

2.0. Вычислить работу силы $F = (x^2 + y^2 + 1)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ вдоль дуги параболы $y = x^3$, заключенной между точками $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$.

Решение:

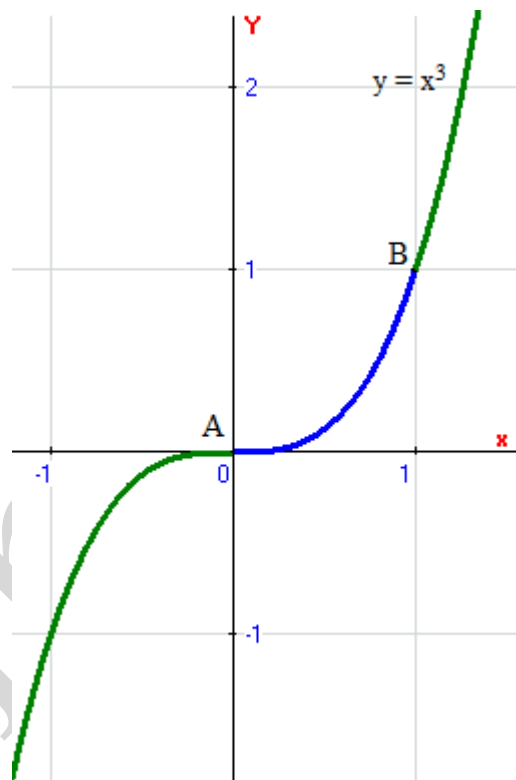
Пусть $\vec{F} = P(x, y)\cdot\mathbf{i} + Q(x, y)\cdot\mathbf{j}$ есть переменная сила, совершающая работу A вдоль пути L , функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на кривой L , тогда работа силы равна

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$y = x^3 \quad dy = 3x^2 dx$$

Переменная x в данном направлении изменяется от $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$

Пределы интегрирования $0 \leq x \leq 1$



Тогда работа силы A равна:

$$\begin{aligned} A &= \int_L (x^2 + y^2 + 1)dx + 2xydy = \int_0^1 (x^2 + (x^3)^2 + 1)dx + 2x \cdot x^3 \cdot 3x^2 dx = \int_0^1 (x^2 + x^6 + 1)dx + 6x^6 dx = \\ &= \int_0^1 (x^2 + x^6 + 1 + 6x^6)dx = \int_0^1 (x^2 + 7x^6 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{7x^7}{7} + x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{x^3}{3} + x^7 + x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} + 1^7 + 1 \right) - \\ &= \left(\frac{0^3}{3} + 0^7 + 0 \right) = \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} \end{aligned}$$