ИДЗ 14.2 – Вариант 0

1. Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции u(x, y). Найти функцию u(x, y)

1.0. $(4x^3y^3 - y^2)dx + (3x^4y^2 - 2xy)dy$

Проверим, выполняется ли условие полного дифференциала $\left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ для функции u(x, y). Имеем:

$$P(x,y) = 4x^3y^3 - y^2;\; Q(x,y) = 3x^4y^2 - 2xy$$

тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(4x^3y^3 - y^2\right) = \left(4x^3y^3\right)'_y - \left(y^2\right)'_y = 4x^3 \cdot 3y^{3-1} - 2y^{2-1} = 12x^3y^2 - 2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^4y^2 - 2xy\right) = \left(3x^4y^2\right)'_x - \left(2xy\right)'_x = 3 \cdot 4x^{4-1}y^2 - 2y = 12x^3y^2 - 2y$$

Так как выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то данное выражение является полным дифференциалом функции u(x, y).

Положив $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, по формуле (1) найдем u(x, y)

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$$

Вычисляем:

$$u(x,y) = \int_1^x \left(4x^3 \cdot 1^3 - 1^2\right)dx + \int_1^y \left(3x^4y^2 - 2xy\right)dy = \int_1^x \left(4x^3 - 1\right)dx + \int_1^y \left(3x^4y^2 - 2xy\right)dy = \left(\frac{4x^4}{4} - x\right)\Bigg|_1^x +$$

$$+\left(\frac{3x^4y^3}{3} - \frac{2xy^2}{2}\right)\Bigg|_1^y = \left(x^4 - x\right)\Big|_1^x + \left(x^4y^3 - xy^2\right)\Big|_1^y = x^4 - x - \left(1^4 - 1\right) + \left(x^4y^3 - xy^2\right) - \left(x^4 \cdot 1^3 - x \cdot 1^2\right) =$$

$$= x^4 - x + x^4y^3 - xy^2 - x^4 + x = x^4y^3 - xy^2 + C$$

Результат верен, если

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y),\; \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

Сделаем проверку:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^4y^3 - xy^2 + C\right) = \left(x^4y^3\right)'_x - \left(xy^2\right)'_x = 4x^{4-1}y^3 - y^2 = 4x^3y^3 - y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^4y^3 - xy^2 + C\right) = \left(x^4y^3\right)'_y - \left(xy^2\right)'_y = 3x^4y^{3-1} - x \cdot 2y^{2-1} = 3x^4y^2 - 2xy$$

Ответ: $u(x,y) = x^4y^3 - xy^2 + C$

2. Решить следующие задачи

2.0. Вычислить работу силы F = $(x^2 + y^2 + 1)i + 2xyj$ вдоль дуги параболы $y = x^3$, заключенной между точками A(0, 0) и B(1, 1).

Решение:

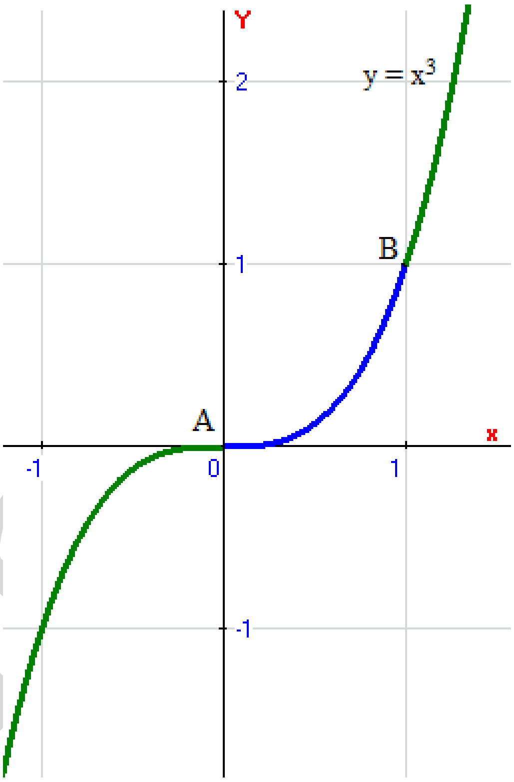
Пусть $\vec{F} = P(x, y)\cdot\vec{i} + Q(x, y)\cdot\vec{j}$ есть переменная сила, совершающая работу A вдоль пути L, функции P(x, y) и Q(x, y) непрерывны на кривой L, тогда работа силы равна

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$y = x^3 \quad dy = 3x^2dx$

Переменная x в данном направлении изменяется от $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$

Пределы интегрирования $0 \le x \le 1$



Тогда работа силы A равна:

$$A = \int_L (x^2 + y^2 + 1)dx + 2xy\,dy = \int_0^1 \left(x^2 + (x^3)^2 + 1\right)dx + 2x\cdot x^3\cdot 3x^2dx = \int_0^1 (x^2 + x^6 + 1)dx + 6x^6dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 + x^6 + 1 + 6x^6)dx = \int_0^1 (x^2 + 7x^6 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{7x^7}{7} + x\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{x^3}{3} + x^7 + x\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} + 1^7 + 1\right) -$$

$$- \left(\frac{0^3}{3} + 0^7 + 0\right) = \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$