Наш сайт: **Fizmathim.ru**
Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh
Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**
Решение задач по высшей математике на заказ

ИДЗ 15.1 – Вариант 0

1. Дана функция u(M) = u(x, y, z) и точки M_1, M_2. Вычислить: 1) производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) grad $u(M_1)$

1.0. $u(M) = 3x^2y^2z^2$, $M_1(-2, 1, 1)$, $M_2(3, -1, 0)$

1. Вычислим производную функции u(M) = u(x, y, z) в точке M_1 по направлению вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1) = (3 - (-2);\ -1-1;\ 0-1) = (5;\ -2;\ -1)$$

Получили вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (5;\ -2;\ -1)$

Справедлива формула для функции u = f(x, y, z)

$$\frac{du(M_1)}{\partial \overrightarrow{M_1M_2}} = \left.\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right|_{M_1} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right|_{M_1} \cdot \cos\beta + \left.\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right|_{M_1} \cdot \cos\gamma$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = (3x^2y^2z^2)'_x = 3\cdot 2xy^2z^2 = 6xy^2z^2 \qquad \left.\frac{\partial u(M)}{\partial x}\right|_{M_1} = 6\cdot(-2)\cdot 1^2\cdot 1^2 = -12$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y} = (3x^2y^2z^2)'_y = 3\cdot 2yx^2z^2 = 6yx^2z^2 \qquad \left.\frac{\partial u(M)}{\partial y}\right|_{M_1} = 6\cdot 1\cdot(-2)^2\cdot 1^2 = 24$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z} = (3x^2y^2z^2)'_z = 3\cdot 2zx^2y^2 = 6zx^2y^2 \qquad \left.\frac{\partial u(M)}{\partial z}\right|_{M_1} = 6\cdot 1\cdot(-2)^2\cdot 1^2 = 24$$

Найдем модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$$

Направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|a|} = -\frac{2}{\sqrt{30}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|a|} = -\frac{1}{\sqrt{30}}$$

Запишем производную функции в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

$$\frac{du(M_1)}{\partial \overrightarrow{M_1M_2}} = -12\cdot\frac{5}{\sqrt{30}} + 24\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{30}}\right) + 24\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{30}}\right) = -\frac{60}{\sqrt{30}} - \frac{48}{\sqrt{30}} - \frac{24}{\sqrt{30}} = -\frac{132}{\sqrt{30}}$$

2. Согласно определению, градиент функции u = f(x, y, z) в точке M_1 получаем по формуле

$$\text{grad}\ u(M_1) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}\vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}\vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1}\vec{k}$$

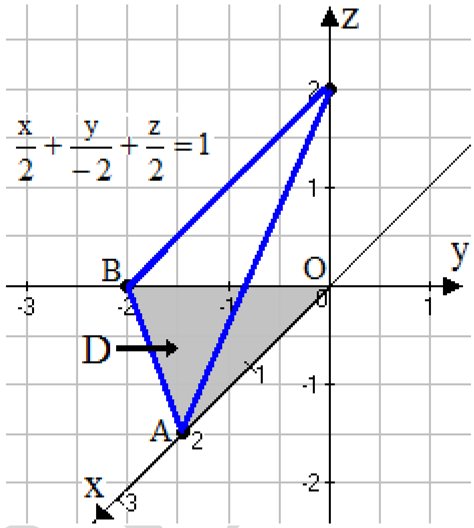
Тогда, согласно данным, полученным в пункте 1 градиент функции равен

$$\text{grad}\ u(M_1) = -12\vec{i} + 24\vec{j} + 24\vec{k}$$

2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости (p), отсеченная координатными плоскостями.

2.0. $\iint\limits_S (5x - 2y + 3z)dS$, (p): x – y + z = 2

Из уравнения плоскости находим
$z = 2 - x + y$



Находим частные производные z'_x и z'_y

$$z'_x = (2 - x + y)'_x = -1$$
$$z'_y = (2 - x + y)'_y = 1$$

Применяем формулу
(дифференциал поверхности)

$$dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dxdy$$

$$dS = \sqrt{1 + 1^2 + (-1)^2}\,dxdy = \sqrt{1+1+1}\,dxdy = \sqrt{3}dxdy$$

Запишем уравнение плоскости x – y + z – 2 = 0
В виде уравнения в отрезках:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1$$

Сводим вычисление поверхностного интеграла к вычислению двойного интеграла по области D, где D – треугольник AOB, являющийся проекцией поверхности S на плоскость Oxy.

Тогда

$$\iint\limits_S (5x - 2y + 3z)dS = \iint\limits_D (5x - 2y + 3(2 - x + y))\sqrt{3}dxdy = \iint\limits_D (5x - 2y + 6 - 3x + 3y)\sqrt{3}dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (2x + y + 6)\sqrt{3}dxdy = \sqrt{3}\int_0^2 dx \int_{x-2}^{0} (2x + y + 6)dy = \sqrt{3}\int_0^2 dx \left(2xy + \frac{y^2}{2} + 6y\right)\Bigg|_{x-2}^{0} =$$

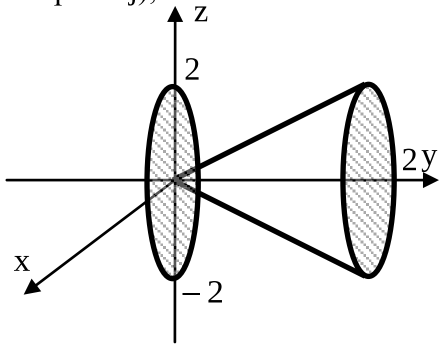
$$= -\sqrt{3}\int_0^2 dx\left(2x(x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + 6(x-2)\right) = -\sqrt{3}\int_0^2 \left(2x^2 - 4x + \frac{x^2 - 4x + 4}{2} + 6x - 12\right)dx =$$

$$= -\sqrt{3}\int_0^2 \left(2x^2 + 2x + \frac{x^2}{2} - 2x + 2 - 12\right)dx = -\sqrt{3}\int_0^2 \left(\frac{5}{2}x^2 - 10\right)dx = -\sqrt{3}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - 10x\right)\Bigg|_0^2 = -\sqrt{3}\left(\frac{5x^3}{6} - 10x\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\sqrt{3}\left(\frac{5\cdot 2^3}{6} - 10\cdot 2\right) + \sqrt{3}\left(\frac{5\cdot 0^3}{6} - 10\cdot 0\right) = -\sqrt{3}\left(\frac{5\cdot 4}{3} - 20\right) = -\sqrt{3}\left(\frac{20 - 60}{3}\right) = \frac{40\sqrt{3}}{3}$$

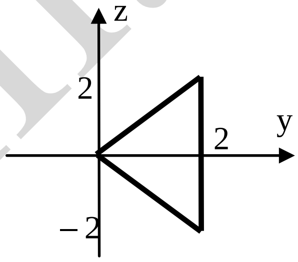
3. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

3.0. $\iint\limits_S yz\,dy\,dz + x^2 dx\,dz + y^2 dx\,dy$, где S – часть поверхности конуса $x^2 + z^2 = y^2$ (нормальный вектор n которой образует тупой угол с ортом j), отсекаемая плоскостями y = 0, y = 2.



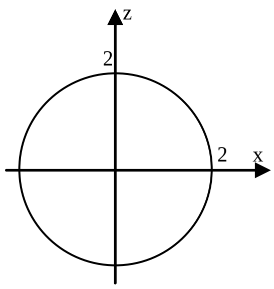
Если обозначить проекции поверхности S на координатные плоскости Oyz, Oxz и Oxy через D_x, D_y, D_z соответственно, а данный интеграл I рассматривать как сумму трех интегралов:

$$I_1 = \iint\limits_S yz\,dy\,dz,\ I_2 = \iint\limits_S x^2 dx\,dz,\ I_3 = \iint\limits_S y^2 dx\,dy$$



В проекции на Oyz конус имеет вид $x^2 = y^2 - z^2$
Из соображения симметрии, следует
Получаем

$$I_1 = \iint\limits_S yz\,dy\,dz = \iint\limits_{D_x} yz\,dy\,dz - \iint\limits_{D_x} yz\,dy\,dz = 0$$



В проекции на Oxz $x^2 + z^2 = 4$ – окружность
Для вычисления интеграла I_2 перейдем к полярным координатам, положив

$$x = \rho\cos\varphi,\ z = \rho\sin\varphi,\ dxdz = \rho d\rho d\varphi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le \rho \le 2$$

$$y^2 = x^2 + z^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho^2$$

$$\rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2$$

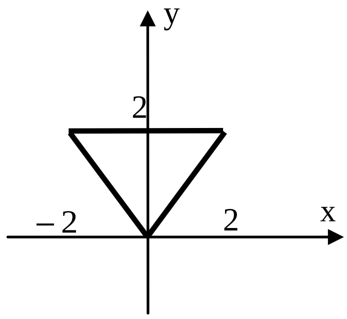
где область D_y – круг $x^2 + z^2 = 4$, y = 0, являющийся проекцией поверхности конуса на плоскость Oxz. Так как нормаль n поверхности образует тупой угол с ортом j, то перед интегралом I_2 ставится знак «–»

Тогда получаем

$$I_2 = -\iint\limits_S x^2 dx\,dz = -\iint\limits_{D_y} x^2 dx\,dz = -\iint\limits_{D_y} \rho^2\cos^2\varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = -\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3 d\rho = -\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi \cdot \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2 =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi \cdot \left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) = -\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi \cdot \frac{16}{4} = -4\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = -2\left.\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right|_0^{2\pi} =$$

$$= -2\left(2\pi + \frac{1}{2}\sin 2\cdot 2\pi - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 2\cdot 0\right)\right) = -2\left(2\pi + \frac{1}{2}\cdot 0\right) = -4\pi$$



В проекции на Oxy конус имеет вид $z^2 = y^2 - x^2$

Получаем
Так как проекция параллельна плоскости Oz
Из соображения симметрии, следует

$$I_3 = \iint\limits_S y^2 dxdy = 0$$

В итоге:

$$\iint\limits_S yz\,dydz + x^2dxdz + y^2dxdy = I_1 + I_2 + I_3 = 0 - 4\pi + 0 = -4\pi$$

4. Вычислить поток векторного поля a(M) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью (p) и координатными плоскостями, двумя способами: а) использовав определение потока; б) с помощью формулы Остроградского – Гаусса.

4.0. a(M) = (3y + 2z)i + (2x + 3y)j + yk, (p): x + 2y + 2z = 2

Вычисляем поток векторного поля с помощью поверхностного интеграла

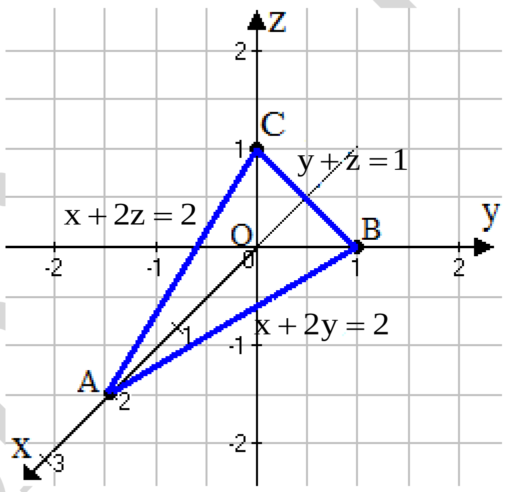
$$\Pi = \iint\limits_S a \cdot n^0 dS$$

где S – внешняя сторона поверхности пирамиды ABCO

Вначале вычислим поток через каждую из четырех граней пирамиды.

Грань AOC лежит в плоскости y = 0, нормаль к этой грани $n_1^0 = -j$, $dS = dxdz$

Тогда поток векторного поля a(M) через грань AOC



$$\Pi_1 = -\iint\limits_{\Delta AOC}(2x+3y)dS = -\iint\limits_{\Delta AOC} 2x\,dxdz = -\int_0^2 2xdx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dz = -\int_0^2 2xdx \cdot z\Big|_0^{1-\frac{x}{2}} = -\int_0^2 2xdx \cdot \left(1-\frac{x}{2}\right) =$$

$$= -\int_0^2 (2x - x^2)dx = -\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = -\left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) + \left(0^2 - \frac{0^3}{3}\right) = -\left(4 - \frac{8}{3}\right) = -\left(\frac{12-8}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

Грань AOB лежит в плоскости z = 0, нормаль к этой грани $n_2^0 = -k$, $dS = dxdy$

$$\Pi_2 = -\iint\limits_{\Delta AOB} ydS = -\iint\limits_{\Delta AOB} y\,dxdy = -\int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} ydy = -\int_0^2 dx \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-\frac{x}{2}} = -\int_0^2 dx \cdot \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 =$$

$$= -\int_0^2 dx \cdot \frac{1}{2}\left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) = -\int_0^2 dx \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{8}\right) = -\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot 2^2 + \frac{1}{24}\cdot 2^3\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot 0^2 + \frac{1}{24}\cdot 0^3\right) = -\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

Грань BOC лежит в плоскости x = 0, нормаль к данной грани $n_3^0 = -i$, $dS = dydz$

$$\Pi_3=-\iint\limits_{\Delta BOC}(3y+2z)dS=-\iint\limits_{\Delta BOC}(3y+2z)dy\,dz=-\int_0^1 dy\int_0^{1-y}(3y+2z)dz=-\int_0^1 dy\cdot\left(3yz+z^2\right)\Big|_0^{1-y}=$$

$$=-\int_0^1 dy\left(3y(1-y)+(1-y)^2\right)=-\int_0^1\left(3y-3y^2+\left(1-2y+y^2\right)\right)dy=-\int_0^1\left(3y-3y^2+1-2y+y^2\right)dy=$$

$$=-\int_0^1\left(1+y-2y^2\right)dy=-\left(y+\frac{y^2}{2}-\frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=-\left(1+\frac{1^2}{2}-\frac{2\cdot1^3}{3}\right)+\left(0+\frac{0^2}{2}-\frac{2\cdot0^3}{3}\right)=-\left(1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=-\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)=$$

$$=-\frac{9-4}{6}=-\frac{5}{6}$$

Грань ABC лежит в плоскости x + 2y + 2z = 2 нормаль к этой грани

$$n_4^0=\frac{i+2j+2k}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{i+2j+2k}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{i+2j+2k}{\sqrt{9}}=\frac{i+2j+2k}{3}$$

Находим частные производные z'_x и z'_y

$$z'_x=\left(1-\frac{x}{2}-y\right)'_x=-\frac{1}{2}$$

$$z'_y=\left(1-\frac{x}{2}-y\right)'_y=-1$$

Применяем формулу (дифференциал поверхности)

$$dS=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy$$

$$dS=\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}\,dxdy=\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}\,dxdy=\sqrt{\frac{9}{4}}dxdy=\frac{3}{2}dxdy$$

Тогда

$$\Pi_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}\left((3y+2z)+2(2x+3y)+2y\right)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}(3y+2z+4x+6y+2y)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}(4x+11y+2z)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}\left(4x+11y+2\left(1-\frac{x}{2}-y\right)\right)dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta ABC}(4x+11y+2-x-2y)dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\int_0^{1-\frac{x}{2}}(3x+9y+2)dy=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\left(3xy+\frac{9}{2}y^2+2y\right)\Bigg|_0^{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\int_0^2 dx\left(3x\left(1-\frac{x}{2}\right)+\frac{9}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^2+2\left(1-\frac{x}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(3x-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}\left(1-x+\frac{x^2}{4}\right)+2-x\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}-\frac{9}{2}x+\frac{9x^2}{8}+2\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(\frac{13}{2}-\frac{5}{2}x-\frac{3}{8}x^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{2}x-\frac{5x^2}{4}-\frac{3x^3}{8\cdot3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{2}x-\frac{5x^2}{4}-\frac{x^3}{8}\right)\Bigg|_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{2}\cdot2-\frac{5\cdot2^2}{4}-\frac{2^3}{8}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{13}{2}\cdot0-\frac{5\cdot0^2}{4}-\frac{0^3}{8}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(13-5-1)=\frac{1}{2}\cdot7=\frac{7}{2}$$

Далее находим поток через полную поверхность пирамиды ABCO:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{7}{2} = -\frac{15}{6} + \frac{7}{2} = \frac{-15+21}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Вычисление потока векторного поля a(M) б) с помощью формулы Остроградского – Гаусса.

Если S – замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая область V, и P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z) – функции непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области V, то справедлива формула Остроградского – Гаусса

$$\Pi = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

По условию

$$P = 3y + 2z \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = (3y + 2z)'_x = 0$$

$$Q = 2x + 3y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} = (2x + 3y)'_y = 3$$

$$R = y \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial z} = (y)'_z = 0$$

Получаем:

$$\iiint\limits_V (0 + 3 + 0) dxdydz = \iiint\limits_V 3dxdydz$$

Пределы интегрирования

$$0 \le x \le 2;\ \ 0 \le y \le 1 - \frac{x}{2};\ \ 0 \le z \le 1 - \frac{x}{2} - y$$

Решаем интеграл

$$\Pi = \iiint\limits_V 3dxdydz = 3\int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dy \int_0^{1-\frac{x}{2}-y} dz = 3\int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dy z\Big|_0^{1-\frac{x}{2}-y} = 3\int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} \left(1 - \frac{x}{2} - y\right) dy =$$

$$= 3\int_0^2 dx \left(y - \frac{xy}{2} - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-\frac{x}{2}} = 3\int_0^2 dx \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \right) =$$

$$= 3\int_0^2 dx \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) \right) = 3\int_0^2 \left(1 - x + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \right) dx = 3\int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \right) dx =$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24} \right)\Bigg|_0^2 = 3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{24} \right) - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{0^2}{4} + \frac{0^3}{24} \right) = 3\cdot\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1$$