

### ИДЗ 15.1 – Вариант 0

1. Дана функция  $u(M) = u(x, y, z)$  и точки  $M_1, M_2$ . Вычислить: 1) производную этой функции в точке  $M_1$  по направлению вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ; 2)  $\text{grad } u(M_1)$

1.0.  $u(M) = 3x^2y^2z^2$ ,  $M_1(-2, 1, 1)$ ,  $M_2(3, -1, 0)$

1. Вычислим производную функции  $u(M) = u(x, y, z)$  в точке  $M_1$  по направлению вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (3 - (-2); -1 - 1; 0 - 1) = (5; -2; -1)$$

Получили вектор  $\overrightarrow{M_1M_2} = (5; -2; -1)$

Справедлива формула для функции  $u = f(x, y, z)$

$$\frac{du(M_1)}{d\overrightarrow{M_1M_2}} = \left. \frac{\partial u(M)}{\partial x} \right|_{M_1} \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial u(M)}{\partial y} \right|_{M_1} \cdot \cos \beta + \left. \frac{\partial u(M)}{\partial z} \right|_{M_1} \cdot \cos \gamma$$

Находим частные производные

$$\left. \frac{\partial u(M)}{\partial x} \right|_{M_1} = (3x^2y^2z^2)'_x = 3 \cdot 2xy^2z^2 = 6xy^2z^2$$

$$\left. \frac{\partial u(M)}{\partial x} \right|_{M_1} = 6 \cdot (-2) \cdot 1^2 \cdot 1^2 = -12$$

$$\left. \frac{\partial u(M)}{\partial y} \right|_{M_1} = (3x^2y^2z^2)'_y = 3 \cdot 2yx^2z^2 = 6yx^2z^2$$

$$\left. \frac{\partial u(M)}{\partial y} \right|_{M_1} = 6 \cdot 1 \cdot (-2)^2 \cdot 1^2 = 24$$

$$\left. \frac{\partial u(M)}{\partial z} \right|_{M_1} = (3x^2y^2z^2)'_z = 3 \cdot 2zx^2y^2 = 6zx^2y^2$$

$$\left. \frac{\partial u(M)}{\partial z} \right|_{M_1} = 6 \cdot 1 \cdot (-2)^2 \cdot 1^2 = 24$$

Найдем модуль вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ :

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 4 + 1} = \sqrt{30}$$

Направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = -\frac{2}{\sqrt{30}}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = -\frac{1}{\sqrt{30}}$$

Запишем производную функции в точке  $M_1$  по направлению вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ :

$$\frac{du(M_1)}{d\overrightarrow{M_1M_2}} = -12 \cdot \frac{5}{\sqrt{30}} + 24 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{30}}\right) + 24 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}\right) = -\frac{60}{\sqrt{30}} - \frac{48}{\sqrt{30}} - \frac{24}{\sqrt{30}} = -\frac{132}{\sqrt{30}}$$

2. Согласно определению, градиент функции  $u = f(x, y, z)$  в точке  $M_1$  получаем по формуле

$$\text{grad } u(M_1) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_1} \vec{i} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_1} \vec{j} + \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_1} \vec{k}$$

Тогда, согласно данным, полученным в пункте 1 градиент функции равен

$$\text{grad } u(M_1) = -12\vec{i} + 24\vec{j} + 24\vec{k}$$

2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости (p), отсеченная координатными плоскостями.

2.0.  $\iint_S (5x - 2y + 3z) dS$ , (p):  $x - y + z = 2$

Из уравнения плоскости находим

$$z = 2 - x + y$$

Находим частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$

$$z'_x = (2 - x + y)'_x = -1$$

$$z'_y = (2 - x + y)'_y = 1$$

Применяем формулу (дифференциал поверхности)

$$dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy$$

$$dS = \sqrt{1 + 1^2 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{1 + 1 + 1} dx dy = \sqrt{3} dx dy$$

Запишем уравнение плоскости  $x - y + z - 2 = 0$

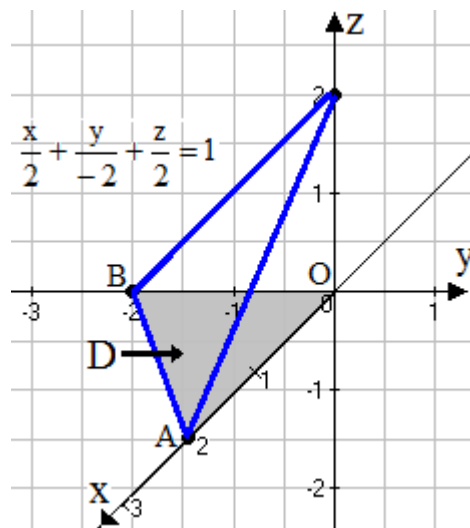
В виде уравнения в отрезках:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1$$

Сводим вычисление поверхностного интеграла к вычислению двойного интеграла по области D, где D – треугольник AOB, являющийся проекцией поверхности S на плоскость Oxy.

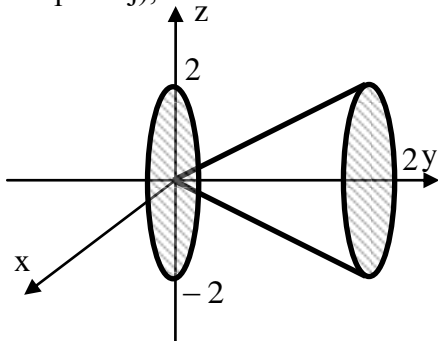
Тогда

$$\begin{aligned} \iint_S (5x - 2y + 3z) dS &= \iint_D (5x - 2y + 3(2 - x + y)) \sqrt{3} dx dy = \iint_D (5x - 2y + 6 - 3x + 3y) \sqrt{3} dx dy = \\ &= \iint_D (2x + y + 6) \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \int_0^2 dx \int_{x-2}^0 (2x + y + 6) dy = \sqrt{3} \int_0^2 dx \left( 2xy + \frac{y^2}{2} + 6y \right) \Big|_{x-2}^0 = \\ &= -\sqrt{3} \int_0^2 dx \left( 2x(x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + 6(x-2) \right) = -\sqrt{3} \int_0^2 \left( 2x^2 - 4x + \frac{x^2 - 4x + 4}{2} + 6x - 12 \right) dx = \\ &= -\sqrt{3} \int_0^2 \left( 2x^2 + 2x + \frac{x^2}{2} - 2x + 2 - 12 \right) dx = -\sqrt{3} \int_0^2 \left( \frac{5}{2} x^2 - 10 \right) dx = -\sqrt{3} \left( \frac{5}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - 10x \right) \Big|_0^2 = -\sqrt{3} \left( \frac{5x^3}{6} - 10x \right) \Big|_0^2 = \\ &= -\sqrt{3} \left( \frac{5 \cdot 2^3}{6} - 10 \cdot 2 \right) + \sqrt{3} \left( \frac{5 \cdot 0^3}{6} - 10 \cdot 0 \right) = -\sqrt{3} \left( \frac{5 \cdot 4}{3} - 20 \right) = -\sqrt{3} \left( \frac{20 - 60}{3} \right) = \frac{40\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$



3. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

3.0.  $\iint_S yz dy dz + x^2 dx dz + y^2 dx dy$ , где  $S$  – часть поверхности конуса  $x^2 + z^2 = y^2$  (нормальный вектор  $n$  которой образует тупой угол с ортом  $j$ ), отсекаемая плоскостями  $y = 0, y = 2$ .



Если обозначить проекции поверхности  $S$  на координатные плоскости  $Oyz, Oxz$  и  $Oxy$  через  $D_x, D_y, D_z$  соответственно, а данный интеграл  $I$  рассматривать как сумму трех интегралов:

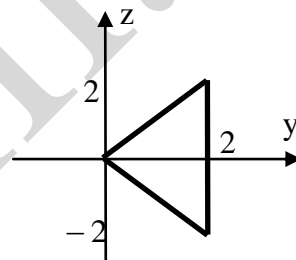
$$I_1 = \iint_S yz dy dz, I_2 = \iint_S x^2 dx dz, I_3 = \iint_S y^2 dx dy$$

В проекции на  $Oyz$  конус имеет вид  $x^2 = y^2 - z^2$

Из соображения симметрии, следует

Получаем

$$I_1 = \iint_S yz dy dz = \iint_{D_x} yz dy dz - \iint_{D_x} yz dy dz = 0$$



В проекции на  $Oxz$   $x^2 + z^2 = 4$  – окружность

Для вычисления интеграла  $I_2$  перейдем к полярным координатам, положив

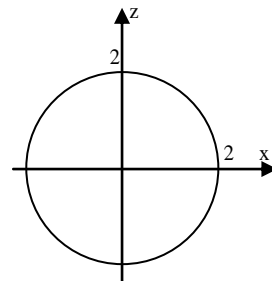
$x = \rho \cos \varphi, z = \rho \sin \varphi, dx dz = \rho d\rho d\varphi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \rho \leq 2$

$$y^2 = x^2 + z^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho^2$$

$$\rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2$$

где область  $D_y$  – круг  $x^2 + z^2 = 4, y = 0$ , являющийся проекцией поверхности конуса

на плоскость  $Oxz$ . Так как нормаль  $n$  поверхности образует тупой угол с ортом  $j$ , то перед интегралом  $I_2$  ставится знак «-»



Тогда получаем

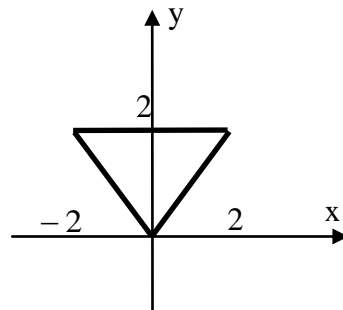
$$\begin{aligned} I_2 &= - \iint_S x^2 dx dz = - \iint_{D_y} x^2 dx dz = - \iint_{D_y} \rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho d\rho d\varphi = - \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = - \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 = \\ &= - \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \cdot \left( \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) = - \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \cdot \frac{16}{4} = -4 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = -2 \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= -2 \left( 2\pi + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot 2\pi - \left( 0 + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot 0 \right) \right) = -2 \left( 2\pi + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) = -4\pi \end{aligned}$$

В проекции на  $Oxy$  конус имеет вид  $z^2 = y^2 - x^2$

Получаем

Так как проекция параллельна плоскости  $Oz$

Из соображения симметрии, следует



$$I_3 = \iint_S y^2 dx dy = 0$$

В итоге:

$$\iint_S yz dy dz + x^2 dx dz + y^2 dx dy = I_1 + I_2 + I_3 = 0 - 4\pi + 0 = -4\pi$$

**4.** Вычислить поток векторного поля  $a(M)$  через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью  $(p)$  и координатными плоскостями, двумя способами: а) используя определение потока; б) с помощью формулы Остроградского – Гаусса.

**4.0.**  $a(M) = (3y + 2z)i + (2x + 3y)j + yk$ ,  $(p): x + 2y + 2z = 2$

Вычисляем поток векторного поля с помощью поверхностного интеграла

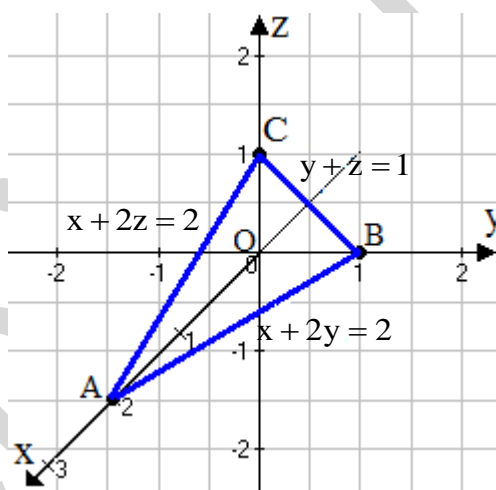
$$\Pi = \iint_S a \cdot n^0 dS$$

где  $S$  – внешняя сторона поверхности пирамиды  $ABCO$

Вначале вычислим поток через каждую из четырех граней пирамиды.

Грань  $AOC$  лежит в плоскости  $y = 0$ , нормаль к этой грани  $n_1^0 = -j$ ,  $dS = dx dz$

Тогда поток векторного поля  $a(M)$  через грань  $AOC$



$$\begin{aligned} \Pi_1 &= - \iint_{\Delta AOC} (2x + 3y) dS = - \iint_{\Delta AOC} 2x dx dz = - \int_0^2 2x dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dz = - \int_0^2 2x dx \cdot z \Big|_0^{1-\frac{x}{2}} = - \int_0^2 2x dx \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) = \\ &= - \int_0^2 (2x - x^2) dx = - \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = - \left( 2^2 - \frac{2^3}{3} \right) + \left( 0^2 - \frac{0^3}{3} \right) = - \left( 4 - \frac{8}{3} \right) = - \left( \frac{12-8}{3} \right) = - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Грань  $AOB$  лежит в плоскости  $z = 0$ , нормаль к этой грани  $n_2^0 = -k$ ,  $dS = dx dy$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= - \iint_{\Delta AOB} y dS = - \iint_{\Delta AOB} y dx dy = - \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} y dy = - \int_0^2 dx \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-\frac{x}{2}} = - \int_0^2 dx \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 = \\ &= - \int_0^2 dx \cdot \frac{1}{2} \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) = - \int_0^2 dx \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{8} \right) = - \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3 \right) \Big|_0^2 = \\ &= - \left( \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{24} \cdot 2^3 \right) + \left( \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{24} \cdot 0^3 \right) = - \left( 1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Грань  $BOC$  лежит в плоскости  $x = 0$ , нормаль к данной грани  $n_3^0 = -i$ ,  $dS = dy dz$

$$\begin{aligned}
 \Pi_3 &= - \iint_{\Delta BOC} (3y + 2z) dS = - \iint_{\Delta BOC} (3y + 2z) dy dz = - \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (3y + 2z) dz = - \int_0^1 dy \cdot (3yz + z^2) \Big|_0^{1-y} = \\
 &= - \int_0^1 dy (3y(1-y) + (1-y)^2) = - \int_0^1 (3y - 3y^2 + (1 - 2y + y^2)) dy = - \int_0^1 (3y - 3y^2 + 1 - 2y + y^2) dy = \\
 &= - \int_0^1 (1 + y - 2y^2) dy = - \left( y + \frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = - \left( 1 + \frac{1^2}{2} - \frac{2 \cdot 1^3}{3} \right) + \left( 0 + \frac{0^2}{2} - \frac{2 \cdot 0^3}{3} \right) = - \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = - \left( \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = \\
 &= - \frac{9-4}{6} = - \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

Грань ABC лежит в плоскости  $x + 2y + 2z = 2$  нормаль к этой грани

$$n_4^0 = \frac{i + 2j + 2k}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{i + 2j + 2k}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{i + 2j + 2k}{\sqrt{9}} = \frac{i + 2j + 2k}{3}$$

Находим частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$

$$z'_x = \left( 1 - \frac{x}{2} - y \right)'_x = -\frac{1}{2}$$

$$z'_y = \left( 1 - \frac{x}{2} - y \right)'_y = -1$$

Применяем формулу (дифференциал поверхности)

$$dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} dx dy = \sqrt{\frac{9}{4}} dx dy = \frac{3}{2} dx dy$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \Pi_4 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \iint_{\Delta ABC} ((3y + 2z) + 2(2x + 3y) + 2y) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} (3y + 2z + 4x + 6y + 2y) dx dy = \\
 &= \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} (4x + 11y + 2z) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} \left( 4x + 11y + 2 \left( 1 - \frac{x}{2} - y \right) \right) dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} (4x + 11y + 2 - x - 2y) dx dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} (3x + 9y + 2) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \left( 3xy + \frac{9}{2} y^2 + 2y \right) \Big|_0^{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int_0^2 dx \left( 3x \left( 1 - \frac{x}{2} \right) + \frac{9}{2} \left( 1 - \frac{x}{2} \right)^2 + 2 \left( 1 - \frac{x}{2} \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left( 3x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{9}{2} \left( 1 - x + \frac{x^2}{4} \right) + 2 - x \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left( 2x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} x + \frac{9x^2}{8} + 2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left( \frac{13}{2} - \frac{5}{2} x - \frac{3}{8} x^2 \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{13}{2} x - \frac{5x^2}{4} - \frac{3x^3}{8 \cdot 3} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{13}{2} x - \frac{5x^2}{4} - \frac{x^3}{8} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{13}{2} \cdot 2 - \frac{5 \cdot 2^2}{4} - \frac{2^3}{8} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{13}{2} \cdot 0 - \frac{5 \cdot 0^2}{4} - \frac{0^3}{8} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} (13 - 5 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

Далее находим поток через полную поверхность пирамиды ABCO:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{7}{2} = -\frac{15}{6} + \frac{7}{2} = \frac{-15+21}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Вычисление потока векторного поля а) б) с помощью формулы Остроградского – Гаусса.

Если  $S$  – замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая область  $V$ , и  $P = P(x, y, z)$ ,  $Q = Q(x, y, z)$ ,  $R = R(x, y, z)$  – функции непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области  $V$ , то справедлива формула Остроградского – Гаусса

$$\Pi = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

По условию

$$P = 3y + 2z \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = (3y + 2z)'_x = 0$$

$$Q = 2x + 3y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} = (2x + 3y)'_y = 3$$

$$R = y \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial z} = (y)'_z = 0$$

Получаем:

$$\iiint_V (0 + 3 + 0) dx dy dz = \iiint_V 3 dx dy dz$$

Пределы интегрирования

$$0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}; 0 \leq z \leq 1 - \frac{x}{2} - y$$

Решаем интеграл

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_V 3 dx dy dz = 3 \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dy \int_0^{1-\frac{x}{2}-y} dz = 3 \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dy z \Big|_0^{1-\frac{x}{2}-y} = 3 \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} \left(1 - \frac{x}{2} - y\right) dy = \\ &= 3 \int_0^2 dx \left( y - \frac{xy}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-\frac{x}{2}} = 3 \int_0^2 dx \left( 1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \right) = \\ &= 3 \int_0^2 dx \left( 1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) \right) = 3 \int_0^2 \left( 1 - x + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \right) dx = 3 \int_0^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \right) dx = \\ &= 3 \left( \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24} \right) \Big|_0^2 = 3 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{24} \right) - 3 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{0^2}{4} + \frac{0^3}{24} \right) = 3 \cdot \left( 1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$