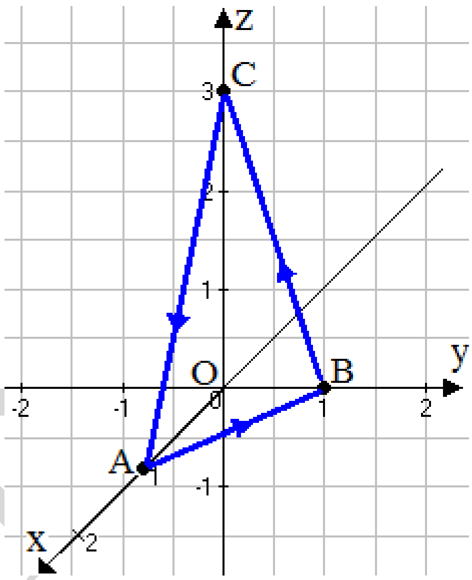
ИДЗ 15.2 – Вариант 0

1. Вычислить циркуляцию векторного поля a(M) по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости (p): Ax + By + Cz = D с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора n = (A, B, C) этой плоскости двумя способами: 1) использовав определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса.

1.0. a(M) = xi + (y – z)j + (x + z)k, (p): 3x + 3y + z = 3



В результате пересечения плоскости (p) с координатными плоскостями получим треугольник ABC и укажем на нем положительное направление обхода контура ABCA в соответствии с условием задачи.

Если задано векторное поле a(M) = (P, Q, R) и некоторая замкнутая кусочно-гладкая кривая Г в пространстве R^3, то криволинейный интеграл

$$C=\oint_{\Gamma} a\cdot\vec{\tau}^{\,0}d\ell=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

называется циркуляцией векторного поля a(M) вдоль контура Г.

Здесь $\vec{\tau}^{\,0}$ - единичный вектор, направленный по касательной к кривой Г и указывающий направление обхода по контуру.

1. Вычислим циркуляцию C данного поля по формуле, в которой обозначим $d\ell=\vec{\tau}^{\,0}d\ell$:

$$C=\oint_{ABCA}a\cdot d\ell=\int_{AB}a\cdot d\ell+\int_{BC}a\cdot d\ell+\int_{CA}a\cdot d\ell$$

На отрезке AB имеем: z = 0, x + y = 1, y = 1 – x, dy = –dx

$$a=xi+(y-0)j+(x+0)k;$$

$$d\ell=dxi+dyj$$

$$a\cdot d\ell=xdx+ydy$$

Решаем криволинейный интеграл

$$\int_{AB}a\cdot d\ell=\int_{AB}xdx+ydy=\int_1^0 xdx+(1-x)(-dx)=\int_1^0(x-1+x)dx=\int_1^0(2x-1)dx=\left(x^2-x\right)\Big|_1^0=\left(0^2-0\right)-$$

$$-\left(1^2-1\right)=0$$

На отрезке BC имеем: x = 0, 3y + z = 3, z = 3 – 3y, dz = –3dy

$$a=0i+(y-z)j+(0+z)k;$$

$$d\ell=dyj+dzk$$

$$a\cdot d\ell=(y-z)dy+zdz$$

Решаем криволинейный интеграл

$$\int_{BC}a\cdot d\ell=\int_{BC}(y-z)dy+zdz=\int_1^0\left((y-(3-3y))dy+(3-3y)(-3dy)\right)=\int_1^0\left((y-3+3y)dy-(9-9y)dy\right)=$$

$$=\int_1^0(4y-3-9+9y)dy=\int_1^0(13y-12)dy=\left(\frac{13y^2}{2}-12y\right)\Bigg|_1^0=\left(\frac{13\cdot0^2}{2}-12\cdot0\right)-\left(\frac{13\cdot1^2}{2}-12\cdot1\right)=-\left(\frac{13}{2}-12\right)=$$

$$=-\left(\frac{13-24}{2}\right)=\frac{11}{2}$$

На отрезке CA имеем: y = 0, 3x + z = 3, z = 3 – 3x, dz = –3dx

$$a = xi + (0 - z)j + (x + z)k;$$

$$d\ell = dxi + dzk$$

$$a \cdot d\ell = xdx + (x + z)dz$$

Решаем криволинейный интеграл

$$\int_{CA} a \cdot d\ell = \int_{CA} xdx + (x+z)dz = \int_0^1 xdx + (x+3-3x)(-3dx) = \int_0^1 xdx - (9-6x)dx = \int_0^1 (x-9+6x)dx = \int_0^1 (7x-9)dx =$$

$$= \left(\frac{7}{2}x^2 - 9x\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{7}{2}\cdot 1^2 - 9\cdot 1\right) - \left(\frac{7}{2}\cdot 0^2 - 9\cdot 0\right) = \frac{7}{2} - 9 = -\frac{11}{2}$$

Следовательно

$$C = 0 + \frac{11}{2} - \frac{11}{2} = 0$$

2. Вычислим циркуляцию данного поля с помощью формулы Стокса

Используя понятия ротора и циркуляции, формулу Стокса можно записать в векторной форме:

$$C = \oint_\Gamma a \cdot \overrightarrow{\tau^0} d\ell = \iint_S \operatorname{rot} a \cdot n^0 dS$$

Для этого определим

$$\operatorname{rot} a(M) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y-z & x+z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(x+z)}{\partial y} - \frac{\partial(y-z)}{\partial z}\right)i - \left(\frac{\partial(x+z)}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)j + \left(\frac{\partial(y-z)}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)k =$$

$$= (0+1)i - (1-0)j + (0-0)k = i - j$$

В качестве поверхности S в формуле Стокса возьмем боковую поверхность пирамиды OABC

$$S = S_{OCA} + S_{OAB} + S_{OBC}$$

По формуле Стокса имеем

$$C = \iint_S \operatorname{rot} a \cdot n^0 dS = \iint_S \operatorname{rot} a \cdot dS$$

где $dS = dydzi + dxdzj + dxdyk$, $(\operatorname{rot} a \cdot dS) = dydz + dxdz$

Следовательно

$$C = \iint_S dydz - dxdz = \iint_{S_{OCA}} dydz - \iint_{S_{OAB}} dxdz$$

$$\iint_{S_{OBC}} dydz = \int_0^1 dy \int_0^{3-3y} dz = \int_0^1 dy \cdot z\Big|_0^{3-3y} = \int_0^1 (3-3y)dy = \left(3y - \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \left(3\cdot 1 - \frac{3\cdot 1^2}{2}\right) - \left(3\cdot 0 - \frac{3\cdot 0^2}{2}\right) =$$

$$= 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\iint_{S_{OAC}} dxdz = \int_0^1 dx \int_0^{3-3x} dz = \int_0^1 dx \cdot z\Big|_0^{3-3x} = \int_0^1 (3-3x)dx = \left(3x - \frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \left(3\cdot 1 - \frac{3\cdot 1^2}{2}\right) - \left(3\cdot 0 - \frac{3\cdot 0^2}{2}\right) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Следовательно

$$C = \iint_S dydz - dxdy = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

2. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $u(M)=u(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

2.0. $u(M) = x^2y + z$, $M_0(1, -2, 3)$

Находим частные производные функции $u(M)$ в любой точке $M(x, y, z)$ и в точке M_0:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = \left(x^2y+z\right)'_x = 2xy \qquad \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 2\cdot 1\cdot(-2) = -4$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y} = \left(x^2y+z\right)'_y = x^2 \qquad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 1^2 = 1$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z} = \left(x^2y+z\right)'_z = 1 \qquad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 1$$

Согласно определению, градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 получаем по формуле

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\vec{k}$$

Тогда в точке $M_0(1, -2, 3)$ имеем $\operatorname{grad} u(M_0) = -4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

Наибольшая скорость изменения поля в точке M_0 достигается в направлении grad $u(M_0)$ и численно равна $|\operatorname{grad} u(M_0)|$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \operatorname{grad} u} = \max\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = |\operatorname{grad} u(M_0)| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18}$$

3. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $a(M) = (x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

3.0. $a(M) = (y - z)i + xj + xzk$, $M_0(1, -2, 2)$

Наибольшая плотность циркуляции векторного поля $a(M)$ в данной точке M_0 достигается в направлении ротора и численно равна $|\operatorname{rot} a(M_0)|$

$$\operatorname{rot} a(M) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & x & xz \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(xz)}{\partial y} - \frac{\partial(x)}{\partial z}\right)i - \left(\frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial(y-z)}{\partial z}\right)j + \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(y-z)}{\partial y}\right)k =$$

$$= (0-0)i - (z+1)j + (1-1)k = -(z+1)j$$

В итоге получили

$$\operatorname{rot} a(M) = -(z+1)j$$

В точке M_0 плотность циркуляции векторного поля $a(M)$:

$$\operatorname{rot} a(M_0) = -3j$$

Находим численное значение наибольшей плотности циркуляции векторного поля в направлении ротора:

$$|\operatorname{rot} a(M_0)| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{0+9+0} = 3$$

4. Выяснить, является ли векторное поле a(M) = (x, y, z) соленоидальным

4.0. $a(M) = (2x + yz)i + (z + xz)j + (-2z + xy)k$

Векторное поле a(M) называется соленоидальным в области пространства V, если в каждой точке этой области дивергенция равна нулю $\operatorname{div} a(M) = 0$

По условию
$P = 2x + yz$
$Q = z + xz$
$R = -2z + xy$
Находим

$$\operatorname{div} a(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(z + xz) + \frac{\partial}{\partial z}(-2z + xy) = 2 + 0 - 2 = 0$$

Так как $\operatorname{div} a(M) = 0$, следовательно, векторное поле является соленоидальным