

### ИДЗ 15.2 – Вариант 0

1. Вычислить циркуляцию векторного поля  $a(M)$  по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости  $(p): Ax + By + Cz = D$  с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора  $n = (A, B, C)$  этой плоскости двумя способами: 1) используя определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса.

1.0.  $a(M) = xi + (y - z)j + (x + z)k$ ,  $(p): 3x + 3y + z = 3$

В результате пересечения плоскости  $(p)$  с координатными плоскостями получим треугольник ABC и укажем на нем положительное направление обхода контура ABCA в соответствии с условием задачи.

Если задано векторное поле  $a(M) = (P, Q, R)$  и некоторая замкнутая кусочно-гладкая кривая  $\Gamma$  в пространстве  $R^3$ , то криволинейный интеграл

$$C = \oint_{\Gamma} a \cdot \vec{\tau}^0 dl = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

называется циркуляцией векторного поля  $a(M)$  вдоль контура  $\Gamma$ .

Здесь  $\vec{\tau}^0$  - единичный вектор, направленный по касательной к кривой  $\Gamma$  и указывающий направление обхода по контуру.

1. Вычислим циркуляцию  $C$  данного поля по формуле, в которой обозначим  $dl = \vec{\tau}^0 dl$ :

$$C = \oint_{ABCA} a \cdot dl = \int_{AB} a \cdot dl + \int_{BC} a \cdot dl + \int_{CA} a \cdot dl$$

На отрезке AB имеем:  $z = 0, x + y = 1, y = 1 - x, dy = -dx$

$$a = xi + (y - 0)j + (x + 0)k;$$

$$dl = dx i + dy j$$

$$a \cdot dl = xdx + ydy$$

Решаем криволинейный интеграл

$$\int_{AB} a \cdot dl = \int_{AB} xdx + ydy = \int_1^0 xdx + (1-x)(-dx) = \int_1^0 (x - 1 + x)dx = \int_1^0 (2x - 1)dx = (x^2 - x)|_1^0 = (0^2 - 0) - (1^2 - 1) = 0$$

На отрезке BC имеем:  $x = 0, 3y + z = 3, z = 3 - 3y, dz = -3dy$

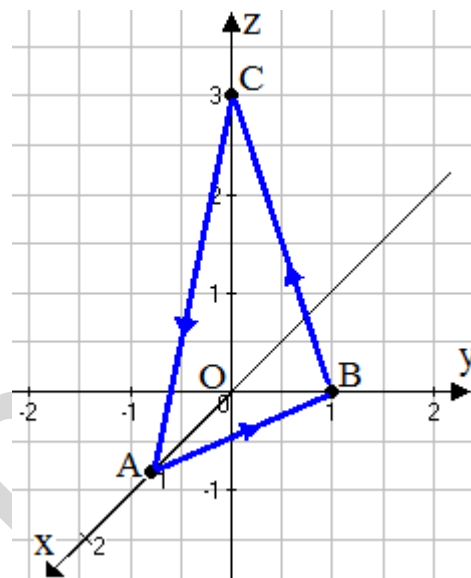
$$a = 0i + (y - z)j + (0 + z)k;$$

$$dl = dy j + dz k$$

$$a \cdot dl = (y - z)dy + zdz$$

Решаем криволинейный интеграл

$$\begin{aligned} \int_{BC} a \cdot dl &= \int_{BC} (y - z)dy + zdz = \int_1^0 ((y - (3 - 3y))dy + (3 - 3y)(-3dy)) = \int_1^0 ((y - 3 + 3y)dy - (9 - 9y)dy) = \\ &= \int_1^0 (4y - 3 - 9 + 9y)dy = \int_1^0 (13y - 12)dy = \left( \frac{13y^2}{2} - 12y \right) \Big|_1^0 = \left( \frac{13 \cdot 0^2}{2} - 12 \cdot 0 \right) - \left( \frac{13 \cdot 1^2}{2} - 12 \cdot 1 \right) = -\left( \frac{13}{2} - 12 \right) = \\ &= -\left( \frac{13 - 24}{2} \right) = \frac{11}{2} \end{aligned}$$



На отрезке CA имеем:  $y = 0$ ,  $3x + z = 3$ ,  $z = 3 - 3x$ ,  $dz = -3dx$

$$a = xi + (0 - z)j + (x + z)k;$$

$$d\ell = dx + dz$$

$$a \cdot d\ell = xdx + (x + z)dz$$

Решаем криволинейный интеграл

$$\begin{aligned} \int_{CA} a \cdot d\ell &= \int_{CA} xdx + (x + z)dz = \int_0^1 xdx + (x + 3 - 3x)(-3dx) = \int_0^1 xdx - (9 - 6x)dx = \int_0^1 (x - 9 + 6x)dx = \int_0^1 (7x - 9)dx = \\ &= \left( \frac{7}{2}x^2 - 9x \right) \Big|_0^1 = \left( \frac{7}{2} \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 \right) - \left( \frac{7}{2} \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 \right) = \frac{7}{2} - 9 = -\frac{11}{2} \end{aligned}$$

Следовательно

$$C = 0 + \frac{11}{2} - \frac{11}{2} = 0$$

**2.** Вычислим циркуляцию данного поля с помощью формулы Стокса

Используя понятия ротора и циркуляции, формулу Стокса можно записать в векторной форме:

$$C = \oint_{\Gamma} a \cdot \vec{\tau}^0 d\ell = \iint_S \text{rot } a \cdot n^0 dS$$

Для этого определим

$$\begin{aligned} \text{rot } a(M) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y - z & x + z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial(x+z)}{\partial y} - \frac{\partial(y-z)}{\partial z} \right) i - \left( \frac{\partial(x+z)}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z} \right) j + \left( \frac{\partial(y-z)}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) k = \\ &= (0+1)i - (1-0)j + (0-0)k = i - j \end{aligned}$$

В качестве поверхности  $S$  в формуле Стокса возьмем боковую поверхность пирамиды OABC

$$S = S_{OCA} + S_{OAB} + S_{OBC}$$

По формуле Стокса имеем

$$C = \iint_S \text{rot } a \cdot n^0 dS = \iint_S \text{rot } a \cdot dS$$

где  $dS = dydz + dx dz + dx dy$ ,  $(\text{rot } a \cdot dS) = dy dz + dx dz$

Следовательно

$$C = \iint_S dy dz + dx dz = \iint_{S_{OCA}} dy dz + \iint_{S_{OAB}} dx dz$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_{OBC}} dy dz &= \int_0^1 dy \int_0^{3-3y} dz = \int_0^1 dy \cdot z \Big|_0^{3-3y} = \int_0^1 (3-3y) dy = \left( 3y - \frac{3y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \left( 3 \cdot 1 - \frac{3 \cdot 1^2}{2} \right) - \left( 3 \cdot 0 - \frac{3 \cdot 0^2}{2} \right) = \\ &= 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\iint_{S_{OAC}} dx dz = \int_0^1 dx \int_0^{3-3x} dz = \int_0^1 dx \cdot z \Big|_0^{3-3x} = \int_0^1 (3-3x) dx = \left( 3x - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \left( 3 \cdot 1 - \frac{3 \cdot 1^2}{2} \right) - \left( 3 \cdot 0 - \frac{3 \cdot 0^2}{2} \right) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Следовательно

$$C = \iint_S dy dz + dx dy = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

2. Найти величину и направление наибольшего изменения функции  $u(M)=u(x, y, z)$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$

2.0.  $u(M) = x^2y + z, M_0(1, -2, 3)$

Находим частные производные функции  $u(M)$  в любой точке  $M(x, y, z)$  и в точке  $M_0$ :

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = (x^2y + z)'_x = 2xy \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 2 \cdot 1 \cdot (-2) = -4$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y} = (x^2y + z)'_y = x^2 \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 1^2 = 1$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z} = (x^2y + z)'_z = 1 \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 1$$

Согласно определению, градиент функции  $u = f(x, y, z)$  в точке  $M_0$  получаем по формуле

$$\text{grad } u(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} \vec{k}$$

Тогда в точке  $M_0(1, -2, 3)$  имеем  $\text{grad } u(M_0) = -4\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

Наибольшая скорость изменения поля в точке  $M_0$  достигается в направлении  $\text{grad } u(M_0)$  и численно равна  $|\text{grad } u(M_0)|$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \text{grad } u} = \max \frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = |\text{grad } u(M_0)| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18}$$

3. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля  $a(M) = (x, y, z)$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$

3.0.  $a(M) = (y - z)\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}, M_0(1, -2, 2)$

Наибольшая плотность циркуляции векторного поля  $a(M)$  в данной точке  $M_0$  достигается в направлении ротора и численно равна  $|\text{rot } a(M_0)|$

$$\text{rot } a(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & x & xz \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial(xz)}{\partial y} - \frac{\partial(x)}{\partial z} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial(y-z)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(y-z)}{\partial y} \right) \vec{k} =$$

$$= (0 - 0)\vec{i} - (z + 1)\vec{j} + (1 - 1)\vec{k} = -(z + 1)\vec{j}$$

В итоге получили

$$\text{rot } a(M) = -(z + 1)\vec{j}$$

В точке  $M_0$  плотность циркуляции векторного поля  $a(M)$ :

$$\text{rot } a(M_0) = -3\vec{j}$$

Находим численное значение наибольшей плотности циркуляции векторного поля в направлении ротора:

$$|\text{rot } a(M_0)| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{0 + 9 + 0} = 3$$

Наш сайт: [Fizmathim.ru](http://Fizmathim.ru)

Группа ВКонтакте [https://vk.com/fizmathim\\_reshe](https://vk.com/fizmathim_reshe)

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

4. Выяснить, является ли векторное поле  $a(M) = (x, y, z)$  соленоидальным

4.0.  $a(M) = (2x + yz)i + (z + xz)j + (-2z + xy)k$

Векторное поле  $a(M)$  называется соленоидальным в области пространства  $V$ , если в каждой точке этой области дивергенция равна нулю  $\operatorname{div} a(M) = 0$

По условию

$$P = 2x + yz$$

$$Q = z + xz$$

$$R = -2z + xy$$

Находим

$$\operatorname{div} a(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(2x + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(z + xz) + \frac{\partial}{\partial z}(-2z + xy) = 2 + 0 - 2 = 0$$

Так как  $\operatorname{div} a(M) = 0$ , следовательно, векторное поле является соленоидальным

Fizmathim.ru