

ИДЗ 2.1 – Вариант 0

1. Даны векторы $a = \alpha m + \beta n$ и $b = \gamma m + \delta n$, где $|m| = k$; $|n| = l$; $(m, n) = \varphi$.

Найти а) $(\lambda a + \mu b) \cdot (v a + \tau b)$; б) $\text{пр}_b(v a + \tau b)$; в) $\cos(a, b)$

1.0 $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = 4, \delta = 5, k = 3, l = 2, \varphi = 5\pi/3, \lambda = 3, \mu = 2, v = 1, \tau = 1$

$$|m| = 3, |n| = 2, (m, n) = 5\pi/3$$

$$a = 3m - 2n \quad b = 4m + 5n$$

а) $(3a + 2b) \cdot (a + b)$

Подставляем начальные данные, вычисляем

$$3a = 3(3m - 2n) = 9m - 6n$$

$$2b = 2(4m + 5n) = 8m + 10n$$

$$3a + 2b = 9m + 8m - 6n + 10n = 17m + 4n$$

$$a = 3m - 2n$$

$$b = 4m + 5n$$

$$a + b = 3m - 2n + 4m + 5n = 7m + 3n$$

В итоге:

$$(3a + 2b) \cdot (a + b) = (17m + 4n) \cdot (7m + 3n) = 119m^2 + 79|m||n|\cos(m, n) + 12n^2 =$$

$$= 119 \cdot 3^2 + 79 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,5 + 12 \cdot 2^2 = 1071 + 237 + 48 = 1356$$

б) $\text{пр}_b(a + b)$

$$\text{Пусть } c = (a + b) = 7m + 3n$$

$$\text{Тогда } \text{пр}_b c = \frac{c \cdot b}{|b|}$$

Найдем значения $c \cdot b$ и $|b|$:

$$c \cdot b = (7m + 3n) \cdot (4m + 5n) = 28m^2 + 47|m||n|\cos(m, n) + 15n^2 = 28 \cdot 3^2 + 47 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,5 + 15 \cdot 2^2 =$$

$$= 252 + 141 + 60 = 453$$

$$|b| = \sqrt{b^2} = \sqrt{(4m + 5n)^2} = \sqrt{16m^2 + 40|m||n|\cos(m, n) + 25n^2} = \sqrt{16 \cdot 3^2 + 40 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,5 + 25 \cdot 2^2} =$$

$$= \sqrt{144 + 120 + 100} = \sqrt{364}$$

Окончательно получаем:

$$\text{пр}_b(a + b) = \frac{453}{\sqrt{364}}$$

в) $\cos(a, b)$

$$a = 3m - 2n \quad b = 4m + 5n$$

Так как

$$d = a = 3m - 2n$$

$$e = b = 4m + 5n$$

Наш сайт: Fizmathim.ru

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**

Решение задач по высшей математике на заказ

$$\text{Тогда } \cos(\hat{d}, e) = \frac{d \cdot e}{|d||e|}$$

Находим $d \cdot e$

$$d \cdot e = (3m - 2n) \cdot (4m + 5n) = 12m^2 + 7|m||n|\cos(\hat{m}, n) - 10n^2 = 12 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,5 - 10 \cdot 2^2 = 108 + 21 - 40 = 89$$

$$|d| = \sqrt{(3m - 2n)^2} = \sqrt{9m^2 - 12|m||n|\cos(\hat{m}, n) + 4n^2} = \sqrt{9 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 2^2} = \sqrt{81 - 36 + 16} = \sqrt{61} = 7,81$$

$$|e| = \sqrt{(4m + 5n)^2} = \sqrt{16m^2 + 40|m||n|\cos(\hat{m}, n) + 25n^2} = \sqrt{16 \cdot 3^2 + 40 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,5 + 25 \cdot 2^2} =$$

$$= \sqrt{144 + 120 + 100} = \sqrt{364} = 19,08$$

В результате имеем:

$$\cos(\hat{a}, b) = \frac{89}{7,81 \cdot 19,08} = \frac{89}{149} = 0,597$$

2. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти: а) модуль вектора **a**; б) скалярное произведение векторов **a** и **b**; в) проекцию вектора **c** на вектор **d**; г) координаты точки M, делящей отрезок *l* в отношении $\alpha : \beta$

$$2.0 \quad A(5, 4, 4), B(2, 4, 6), C(5, -2, 6) \quad a = -2\overline{BC} + 4\overline{BA}, \quad b = \overline{CA}, \quad d = \overline{BA}, \quad l = BC, \quad \alpha = 3, \beta = 1$$

а) модуль вектора a

Последовательно находим

$$\overline{BA} = (5 - 2; 4 - 4; 4 - 6) = (3; 0; -2);$$

$$4\overline{BA} = (12; 0; -8)$$

$$\overline{BC} = (5 - 2; -2 - 4; 6 - 6) = (3; -6; 0)$$

$$-2\overline{BC} = (-6; 12; 0)$$

$$-2\overline{BC} + 4\overline{BA} = (-6 + 12; 12 + 0; 0 + (-8)) = (6; 12; -8)$$

Модуль вектора определяем выражением

$$|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Тогда

Модуль вектора a:

$$|a| = |-2\overline{BC} + 4\overline{BA}| = \sqrt{6^2 + 12^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 144 + 64} = \sqrt{244}$$

б) скалярное произведение векторов a и b

$$a = -2\overline{BC} + 4\overline{BA} = (6; 12; -8)$$

$$b = \overline{CA} = (0; 6; -2)$$

Скалярное произведение двух векторов находим по формуле

$$a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Тогда

$$a \cdot b = (6 \cdot 0 + 12 \cdot 6 + (-8) \cdot (-2)) = 0 + 72 + 16 = 88$$

в) проекцию вектора c на вектор d;

$$\text{Так как } \text{пр}_d c = \frac{c \cdot d}{|d|} \quad c = \overline{CA} = (0; 6; -2)$$

$$d = \overline{BA} = (3; 0; -2)$$

$$c \cdot d = (0 \cdot 3 + 6 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2)) = 0 + 4 = 4$$

$$|d| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\text{пр}_{\overline{BA}} \overline{CA} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

г) координаты точки M, делящей отрезок l в отношении 3 : 1

$$B(2, 4, 6), C(5, -2, 6)$$

Имеем: $\lambda = 3 \quad r_M = \frac{r_B + \lambda r_C}{1 + \lambda}$. Следовательно,

$$x_M = \frac{2 + 3 \cdot 5}{1 + 3} = \frac{17}{4} \quad y_M = \frac{4 + 3 \cdot (-2)}{1 + 3} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$z_M = \frac{6 + 3 \cdot 6}{1 + 3} = \frac{24}{4} = 6 \quad M = \left(\frac{17}{4}; -\frac{1}{2}; 6 \right)$$

3. Доказать, что векторы a, b, c образуют базис, и найти координаты вектора d в этом базисе.

3.0 $a(2, -1, 2); b(1, 1, 2); c(4, 1, 4); d(8, 11, 22)$

Вычисляем по правилу треугольника:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Тогда

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - (2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 4) = 8 - 8 + 2 - (8 + 4 - 4) = -6 \neq 0$$

Следовательно, векторы a, b, c образуют базис, и вектор d линейно выражается через базисные векторы:

$$d = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

или в координатной форме

$$\left. \begin{aligned} 2\alpha + \beta + 4\gamma &= 8 \\ -\alpha + \beta + \gamma &= 11 \\ 2\alpha + 2\beta + 4\gamma &= 22 \end{aligned} \right\}$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера. Находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 2 - 8 - (8 + 4 - 4) = -6$$

Найдем

$$\Delta\alpha = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 11 & 1 & 1 \\ 22 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 22 + 88 - (88 + 16 + 44) = -6$$

$$\Delta\beta = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 1 \\ 2 & 22 & 4 \end{vmatrix} = 88 + 16 - 88 - (88 + 44 - 32) = -84$$

$$\Delta\gamma = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 22 \end{vmatrix} = 44 + 22 - 16 - (16 + 44 - 22) = 12$$

$$\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\Delta}; \quad \beta = \frac{\Delta\beta}{\Delta}; \quad \gamma = \frac{\Delta\gamma}{\Delta}$$

$$\alpha = \frac{-6}{-6} = 1; \quad \beta = \frac{-84}{-6} = 14; \quad \gamma = \frac{12}{-6} = -2$$

Поэтому $d(1; 14; -2) = a + 14b - 2c$