ИДЗ 2.1 – Вариант 0

1. Даны векторы a = αm+βn и b = γm+δn, где |m| = k; |n| = *l*; (m,^n) = φ.
Найти а) (λa+μb)·(νa+τb); б) пр$_в$(νa+τb); в) cos(a,^τb)

1.0 α = 3, β = –2, γ = 4, δ = 5,   k = 3, l = 2, φ = 5π/3,   λ = 3, μ = 2, ν = 1, τ = 1

$$|m| = 3,\ |n| = 2,\ \left(\widehat{m, n}\right) = 5\pi/3$$

$$a = 3m - 2n \qquad b = 4m + 5n$$

а) $(3a + 2b)\cdot(a + b)$

Подставляем начальные данные, вычисляем

$3a = 3(3m - 2n) = 9m - 6n$

$2b = 2(4m + 5n) = 8m + 10n$

$3a + 2b = 9m + 8m - 6n + 10n = 17m + 4n$

$a = 3m - 2n$

$b = 4m + 5n$

$a + b = 3m - 2n + 4m + 5n = 7m + 3n$

В итоге:

$$(3a + 2b)\cdot(a + b) = (17m + 4n)\cdot(7m + 3n) = 119m^2 + 79|m||n|\cos\left(\widehat{m, n}\right) + 12n^2 =$$

$$= 119\cdot 3^2 + 79\cdot 3\cdot 2\cdot 0{,}5 + 12\cdot 2^2 = 1071 + 237 + 48 = 1356$$

б) $\text{пр}_b(a + b)$

Пусть $c = (a + b) = 7m + 3n$

Тогда $\text{пр}_b c = \dfrac{c\cdot b}{|b|}$

Найдем значения $c\cdot b$ и $|b|$:

$$c\cdot b = (7m + 3n)\cdot(4m + 5n) = 28m^2 + 47|m||n|\cos\left(\widehat{m, n}\right) + 15n^2 = 28\cdot 3^2 + 47\cdot 3\cdot 2\cdot 0{,}5 + 15\cdot 2^2 =$$

$$= 252 + 141 + 60 = 453$$

$$|b| = \sqrt{b^2} = \sqrt{(4m + 5n)^2} = \sqrt{16m^2 + 40|m||n|\cos\left(\widehat{m, n}\right) + 25n^2} = \sqrt{16\cdot 3^2 + 40\cdot 3\cdot 2\cdot 0{,}5 + 25\cdot 2^2} =$$

$$= \sqrt{144 + 120 + 100} = \sqrt{364}$$

Окончательно получаем:

$$\text{пр}_b(a + b) = \frac{453}{\sqrt{364}}$$

в) $\cos\left(\widehat{a, b}\right)$

$a = 3m - 2n \qquad b = 4m + 5n$

Так как

$d = a = 3m - 2n$

$e = b = 4m + 5n$

Тогда $\cos\left(\widehat{d, e}\right) = \dfrac{d \cdot e}{|d||e|}$

Находим $d \cdot e$

$$d \cdot e = (3m - 2n) \cdot (4m + 5n) = 12m^2 + 7|m||n|\cos\left(\widehat{m, n}\right) - 10n^2 = 12 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,5 - 10 \cdot 2^2 = 108 + 21 - 40 = 89$$

$$|d| = \sqrt{(3m - 2n)^2} = \sqrt{9m^2 - 12|m||n|\cos\left(\widehat{m, n}\right) + 4n^2} = \sqrt{9 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 2^2} = \sqrt{81 - 36 + 16} = \sqrt{61} = 7,81$$

$$|e| = \sqrt{(4m + 5n)^2} = \sqrt{16m^2 + 40|m||n|\cos\left(\widehat{m, n}\right) + 25n^2} = \sqrt{16 \cdot 3^2 + 40 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0,5 + 25 \cdot 2^2} =$$

$$= \sqrt{144 + 120 + 100} = \sqrt{364} = 19,08$$

В результате имеем:

$$\cos\left(\widehat{a, b}\right) = \frac{89}{7,81 \cdot 19,08} = \frac{89}{149} = 0,597$$

2. По координатам точек А, В и С для указанных векторов найти: а) модуль вектора **a**; б) скалярное произведение векторов **a** и **b**; в) проекцию вектора **c** на вектор **d**; г) координаты точки М, делящей отрезок *l* в отношении $\alpha : \beta$

2.0 A(5, 4, 4), B(2, 4, 6), C(5, –2, 6) $a = -2\overline{BC} + 4\overline{BA}$, $b = c = \overline{CA}$, $d = \overline{BA}$, l=BC, $\alpha = 3$, $\beta = 1$

а) модуль вектора a

Последовательно находим

$$\overline{BA} = (5-2;\ 4-4;\ 4-6) = (3;\ 0;\ -2);$$

$$4\overline{BA} = (12;\ 0;\ -8)$$

$$\overline{BC} = (5-2;\ -2-4;\ 6-6) = (3;\ -6;\ 0)$$

$$-2\overline{BC} = (-6;\ 12;\ 0)$$

$$-2\overline{BC} + 4\overline{BA} = (-6+12;\ 12+0;\ 0+(-8)) = (6;\ 12;\ -8)$$

Модуль вектора определяем выражением

$$|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Тогда

Модуль вектора a:

$$|a| = \left|-2\overline{BC} + 4\overline{BA}\right| = \sqrt{6^2 + 12^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+144+64} = \sqrt{244}$$

б) скалярное произведение векторов a и b

$$a = -2\overline{BC} + 4\overline{BA} = (6;\ 12;\ -8)$$

$$b = \overline{CA} = (0;\ 6;\ -2)$$

Скалярное произведение двух векторов находим по формуле

$$a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Тогда

$$a \cdot b = (6\cdot 0 + 12\cdot 6 + (-8)\cdot(-2)) = 0 + 72 + 16 = 88$$

в) проекцию вектора c на вектор d;

Так как $\text{пр}_d c = \dfrac{c \cdot d}{|d|}$ $\quad c = \overline{CA} = (0;\ 6;\ -2)$

$$d = \overline{BA} = (3;\ 0;\ -2)$$

$$c \cdot d = (0\cdot 3 + 6\cdot 0 + (-2)\cdot(-2)) = 0 + 4 = 4$$

$$|d| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\text{пр}_{\overline{BA}}\overline{CA} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

г) координаты точки М, делящей отрезок *l* в отношении $3:1$

B(2, 4, 6), C(5, –2, 6)

Имеем: $\lambda = 3$ $\quad r_M = \dfrac{r_B + \lambda r_C}{1+\lambda}$. Следовательно,

$$x_M = \frac{2+3\cdot 5}{1+3} = \frac{17}{4} \qquad y_M = \frac{4+3\cdot(-2)}{1+3} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$z_M = \frac{6+3\cdot 6}{1+3} = \frac{24}{4} = 6 \qquad M = \left(\frac{17}{4};\ -\frac{1}{2};\ 6\right)$$

3. Доказать, что векторы a,b,c образуют базис, и найти координаты вектора d в этом базисе.

3.0 a(2, –1, 2); b(1, 1, 2); c(4, 1, 4); d(8, 11, 22)

Вычисляем по правилу треугольника:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Тогда

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot4 + (-1)\cdot2\cdot4 + 2\cdot1\cdot1 - (2\cdot1\cdot4 + 2\cdot2\cdot1 + (-1)\cdot1\cdot4) = 8 - 8 + 2 - (8 + 4 - 4) = -6 \neq 0$$

Следовательно, векторы a,b,c образуют базис, и вектор d линейно выражается через базисные векторы:

$$d = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

или в координатной форме

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha + \beta + 4\gamma &= 8 \\ -\alpha + \beta + \gamma &= 11 \\ 2\alpha + 2\beta + 4\gamma &= 22 \end{aligned}\right\}$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера. Находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 2 - 8 - (8 + 4 - 4) = -6$$

Найдем

$$\Delta\alpha = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ 11 & 1 & 1 \\ 22 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 32 + 22 + 88 - (88 + 16 + 44) = -6$$

$$\Delta\beta = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 1 \\ 2 & 22 & 4 \end{vmatrix} = 88 + 16 - 88 - (88 + 44 - 32) = -84$$

$$\Delta\gamma = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & 11 \\ 2 & 2 & 22 \end{vmatrix} = 44 + 22 - 16 - (16 + 44 - 22) = 12$$

$$\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\Delta}; \quad \beta = \frac{\Delta\beta}{\Delta}; \quad \gamma = \frac{\Delta\gamma}{\Delta}$$

$$\alpha = \frac{-6}{-6} = 1; \quad \beta = \frac{-84}{-6} = 14; \quad \gamma = \frac{12}{-6} = -2$$

Поэтому $d(1;\ 14; -2) = a + 14b - 2c$