

ИДЗ 2.2 – Вариант 0

1. Даны векторы \mathbf{a}, \mathbf{b} и \mathbf{c} . Необходимо: а) вычислить смешанное произведение трех векторов; б) найти модуль векторного произведения; в) вычислить скалярное произведение двух векторов; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора; д) проверить, будут ли компланарны три вектора.

1.0 $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; а) $2\mathbf{a}$, $-2\mathbf{b}$, \mathbf{c} ; б) \mathbf{b} , $-2\mathbf{c}$; в) $4\mathbf{a}$, $2\mathbf{c}$; г) $2\mathbf{b}$, \mathbf{c} ; д) \mathbf{a} , $-3\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$.

а) вычислить смешанное произведение трех векторов $2\mathbf{a}$, $-2\mathbf{b}$, \mathbf{c}

Так как, то

$$2\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

$$-2\mathbf{b} = -6\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

Вычисляем по правилу треугольника:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Находим смешанное произведение

$$(2\mathbf{a} \times (-2\mathbf{b})) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -6 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 10 \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-6) \cdot 4 -$$

$$-(2 \cdot 10 \cdot 2 + 6 \cdot 2 \cdot 4 + (-4) \cdot (-6) \cdot (-3)) = -180 - 16 - 48 - (40 + 48 - 72) = -260$$

б) найти модуль векторного произведения \mathbf{b} , $-2\mathbf{c}$

Поскольку

$$\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$-2\mathbf{c} = -4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

Векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ выражается через координаты данных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} следующим образом:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Находим векторное произведение

$$\mathbf{b} \times (-2\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -5 & -1 \\ -4 & -8 & 6 \end{vmatrix} = (-30 - 8)\mathbf{i} - (18 - 4)\mathbf{j} + (-24 - 20)\mathbf{k} = -38\mathbf{i} - 14\mathbf{j} - 44\mathbf{k}$$

модуль векторного произведения :

$$|\mathbf{b} \times (-2\mathbf{c})| = \sqrt{(-38)^2 + (-14)^2 + (-44)^2} = \sqrt{1444 + 196 + 1936} = \sqrt{3576}$$

в) вычислить скалярное произведение двух векторов $4\mathbf{a}$, $2\mathbf{c}$

Находим

$$4\mathbf{a} = 12\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

$$2\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

Скалярное произведение двух векторов находим по формуле

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$4\mathbf{a} \cdot 2\mathbf{c} = 12 \cdot 4 + (-8) \cdot 8 + 4 \cdot (-6) = 48 - 64 - 24 = -40$$

Наш сайт: Fizmathim.ru

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $2b$, c

Так как $2b = 6i - 10j - 2k$, $c = 2i + 4j - 3k$

и $\frac{6}{2} \neq -\frac{10}{4} \neq \frac{-2}{-3}$, то векторы $2b$ и c не коллинеарны,

поскольку

$2b \cdot c = 6 \cdot 2 + (-10) \cdot 4 + (-2) \cdot (-3) = 12 - 40 + 6 = -22 \neq 0$, то векторы $2b$ и c неортогональны.

д) проверить, будут ли компланарны три вектора a , $-3b$, $2c$.

Векторы a , b , c компланарны, если $abc=0$. Вычисляем

$a = 3i - 2j + k$,

$-3b = -9i + 15j + 3k$,

$2c = 4i + 8j - 6k$

$$(a \times (-3b)) \cdot 2c = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -9 & 15 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 15 \cdot (-6) + (-2) \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-9) \cdot 8 -$$

$$-(1 \cdot 15 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 8 + (-2) \cdot (-9) \cdot (-6)) = -270 - 24 - 72 - (60 + 72 - 108) = -390$$

т.е. векторы a , $-3b$, $2c$ не компланарны.

2. Вершины пирамиды находятся в точках А, В, С и D. Вычислить: а) площадь указанной грани; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра l и две вершины пирамиды; в) объем пирамиды ABCD.

2.0 А(2, -3, -1), В(-3, 1, 4), С(3, 2, 5), D(-2, -4, 3); а) ACD; б) $l=AB$, С и D

а) площадь указанной грани ACD

Известно, что $S_{ACD} = \frac{1}{2} |\overline{AC} \times \overline{AD}|$ Находим:

$$\overline{AC} = (1; 5; 6) \quad \overline{AD} = (-4; -1; 4)$$

Векторное произведение $a \times b$ выражается через координаты данных векторов а и b следующим образом:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Вычисляем:

$$\overline{AC} \times \overline{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & 6 \\ -4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (20 + 6)i - (4 + 24)j + (-1 + 20)k = 26i - 28j + 19k$$

Модуль вектора определяем выражением

$$|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$|\overline{AC} \times \overline{AD}| = \sqrt{26^2 + (-28)^2 + 19^2} = \sqrt{676 + 784 + 361} = \sqrt{1821}$$

Окончательно имеем:

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \sqrt{1821} = \frac{1}{2} \cdot 42,67 = 21,34$$

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AB и две вершины пирамиды C и D;

А(2, -3, -1), В(-3, 1, 4), С(3, 2, 5), D(-2, -4, 3);

Находим точку середины ребра BD

$$K = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right); K = \left(\frac{2 + (-3)}{2}; \frac{-3 + 1}{2}; \frac{-1 + 4}{2} \right); K = \left(-\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{2} \right)$$

$$\overline{KC} = \left(\frac{7}{2}; 3; \frac{7}{2} \right) = (3,5; 3; 3,5) \quad \overline{KD} = \left(-\frac{3}{2}; -3; \frac{3}{2} \right) = (-1,5; -3; 1,5)$$

Площадь сечения находим по формуле:

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} |\overline{KC} \times \overline{KD}|$$

$$\overline{KC} \times \overline{KD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3,5 & 3 & 3,5 \\ -1,5 & -3 & 1,5 \end{vmatrix} = (4,5 + 10,5)i - (5,25 + 5,25)j + (-10,5 + 4,5)k = 15i - 10,5j - 6k$$

Модуль равен:

$$|\overline{KC} \times \overline{KD}| = \sqrt{15^2 + (-10,5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{225 + 110,25 + 36} = \sqrt{371,25}$$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \sqrt{371,25} = \frac{19,26}{2} = 9,63$$

Наш сайт: Fizmathim.ru

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

в) объем пирамиды ABCD

$$\text{Поскольку } V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}|$$

$$\overline{AB} = (-5; 4; 5)$$

$$\overline{AC} = (1; 5; 6)$$

$$\overline{AD} = (-4; -1; 4)$$

Находим смешанное произведение векторов:

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -5 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ -4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -5 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \cdot (-4) + 5 \cdot 1 \cdot (-1) - (5 \cdot 5 \cdot (-4) + (-5) \cdot 6 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \cdot 4) =$$

$$= -100 - 96 - 5 - (-100 + 30 + 16) = |-147| = 147$$

Тогда объем пирамиды ABCD

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \cdot 147 = \frac{49}{2} = 24,5$$

Наш сайт: Fizmathim.ru

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

3. Сила F приложена к точке A . Вычислить: а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B ; б) модуль момента силы F относительно точки B .

$$3.0 \quad F = (3, -2, 1), \quad A(3, 3, 2), \quad B(5, 1, -3)$$

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B ;

Так как $A = F \cdot s$,

$$s = \overline{AB} = (5-3, 1-3, -3-2) = (2, -2, -5), \text{ то}$$

$$A = F \cdot \overline{AB} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot (-5) = 6 + 4 - 5 = 5$$

$$A = 5$$

б) модуль момента силы F относительно точки B .

Момент силы $M = \overline{BA} \times F$,

$$\overline{BA} = (-2, 2, 5)$$

Векторное произведение $a \times b$ выражается через координаты данных векторов a и b следующим образом:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Вычисляем:

$$\overline{BA} \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (2+10)i - (-2-15)j + (4-6)k = 12i + 17j - 2k$$

Модуль определяем выражением

$$|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Следовательно модуль момента силы F относительно точки B .

$$|M| = |\overline{BA} \times F| = \sqrt{12^2 + 17^2 + (-2)^2} = \sqrt{144 + 289 + 4} = \sqrt{437} = 20,9$$