ИДЗ 2.2 – Вариант 0

1. Даны векторы **a**,**b** и **c**. Необходимо: а) вычислить смешанное произведение трех векторов; б) найти модуль векторного произведения; в) вычислить скалярное произведение двух векторов; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора; д) проверить, будут ли компланарны три вектора.
1.0 a = 3i – 2j + k, b = 3i – 5j – k, c = 2i + 4j – 3k; а) 2a, –2b, c; б) b, –2c; в) 4a, 2c; г) 2b, c; д) a, –3b, 2c.

а) вычислить смешанное произведение трех векторов 2a, –2b, c;
Так как, то
2a = 6i – 4j + 2k,
–2b = –6i + 10j + 2k,
c = 2i + 4j – 3k
Вычисляем по правилу треугольника:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}\right)$$

Находим смешанное произведение

$$(2a\times(-2b))\cdot c = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 2 \\ -6 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 6\cdot10\cdot(-3)+(-4)\cdot2\cdot2+2\cdot(-6)\cdot4-$$

$$-\left(2\cdot10\cdot2+6\cdot2\cdot4+(-4)\cdot(-6)\cdot(-3)\right) = -180-16-48-\left(40+48-72\right) = -260$$

б) найти модуль векторного произведения b, –2c
Поскольку
b = 3i – 5j – k,
–2c = –4i – 8j + 6k
Векторное произведение $a\times b$ выражается через координаты данных векторов a и b следующим образом:

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

Находим векторное произведение

$$b\times(-2c) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -5 & -1 \\ -4 & -8 & 6 \end{vmatrix} = (-30-8)i-(18-4)j+(-24-20)k = -38i-14j-44k$$

модуль векторного произведения :

$$|b\times(-2c)| = \sqrt{(-38)^2+(-14)^2+(-44)^2} = \sqrt{1444+196+1936} = \sqrt{3576}$$

в) вычислить скалярное произведение двух векторов 4a, 2c
Находим
4a = 12i – 8j + 4k,
2c = 4i + 8j – 6k
Скалярное произведение двух векторов находим по формуле

$$a\cdot b = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$4a\cdot 2c = 12\cdot4+(-8)\cdot8+4\cdot(-6) = 48-64-24 = -40$$

г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора 2b, c
Так как 2b = 6i – 10j – 2k, c = 2i + 4j – 3k
и $\frac{6}{2} \neq -\frac{10}{4} \neq \frac{-2}{-3}$, то векторы 2b и c не коллинеарны,
поскольку
$2b \cdot c = 6 \cdot 2 + (-10) \cdot 4 + (-2) \cdot (-3) = 12 - 40 + 6 = -22 \neq 0$, то векторы 2b и c неортогональны.

д) проверить, будут ли компланарны три вектора a, –3b, 2c.
Векторы a, b, c компланарны, если abc=0. Вычисляем
a = 3i – 2j + k,
–3b = –9i + 15j + 3k,
2c = 4i + 8j – 6k

$$(a \times (-3b)) \cdot 2c = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -9 & 15 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 15 \cdot (-6) + (-2) \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-9) \cdot 8 -$$

$$-(1 \cdot 15 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 8 + (-2) \cdot (-9) \cdot (-6)) = -270 - 24 - 72 - (60 + 72 - 108) = -390$$

т.е. векторы a, –3b, 2c не компланарны.

2. Вершины пирамиды находятся в точках A, B, C и D. Вычислить: а) площадь указанной грани; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра *l* и две вершины пирамиды; в) объем пирамиды ABCD.
2.0 A(2, –3, –1), B(–3, 1, 4), C(3, 2, 5), D(–2, –4, 3); а) ACD; б) *l*=AB, C и D

а) площадь указанной грани ACD

Известно, что $S_{ACD} = \frac{1}{2}\left|\overline{AC}\times\overline{AD}\right|$ Находим:

$\overline{AC} = (1;\ 5;\ 6)\quad \overline{AD} = (-4;\ -1;\ 4)$

Векторное произведение $a\times b$ выражается через координаты данных векторов a и b следующим образом:

$$a\times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

Вычисляем:

$$\overline{AC}\times\overline{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & 6 \\ -4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (20+6)i-(4+24)j+(-1+20)k = 26i-28j+19k$$

Модуль вектора определяем выражением

$$|a| = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

$$\left|\overline{AC}\times\overline{AD}\right| = \sqrt{26^2+(-28)^2+19^2} = \sqrt{676+784+361} = \sqrt{1821}$$

Окончательно имеем:

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}\sqrt{1821} = \frac{1}{2}\cdot 42{,}67 = 21{,}34$$

б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AB и две вершины пирамиды C и D;
A(2, –3, –1), B(–3, 1, 4), C(3, 2, 5), D(–2, –4, 3);
Находим точку середины ребра BD

$$K = \left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right);\ K = \left(\frac{2+(-3)}{2};\frac{-3+1}{2};\frac{-1+4}{2}\right);\ K = \left(-\frac{1}{2};\ -1;\ \frac{3}{2}\right)$$

$$\overline{KC} = \left(\frac{7}{2};\ 3;\ \frac{7}{2}\right) = (3{,}5;\ 3;\ 3{,}5)\qquad \overline{KD} = \left(-\frac{3}{2};\ -3;\ \frac{3}{2}\right) = (-1{,}5;\ -3;\ 1{,}5)$$

Площадь сечения находим по формуле:

$$S_{сеч} = \frac{1}{2}\left|\overline{KC}\times\overline{KD}\right|$$

$$\overline{KC}\times\overline{KD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3{,}5 & 3 & 3{,}5 \\ -1{,}5 & -3 & 1{,}5 \end{vmatrix} = (4{,}5+10{,}5)i-(5{,}25+5{,}25)j+(-10{,}5+4{,}5)k = 15i-10{,}5j-6k$$

Модуль равен:

$$\left|\overline{KC}\times\overline{KD}\right| = \sqrt{15^2+(-10{,}5)^2+(-6)^2} = \sqrt{225+110{,}25+36} = \sqrt{371{,}25}$$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2}\sqrt{371{,}25} = \frac{19{,}26}{2} = 9{,}63$$

в) объем пирамиды ABCD

Поскольку $V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}\right|$

$\overline{AB} = (-5;\ 4;\ 5)$

$\overline{AC} = (1;\ 5;\ 6)$

$\overline{AD} = (-4;\ -1;\ 4)$

Находим смешанное произведение векторов:

$$\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} -5 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ -4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -5\cdot5\cdot4 + 4\cdot6\cdot(-4) + 5\cdot1\cdot(-1) - \left(5\cdot5\cdot(-4) + (-5)\cdot6\cdot(-1) + 4\cdot1\cdot4\right) =$$

$$= -100 - 96 - 5 - (-100 + 30 + 16) = |-147| = 147$$

Тогда объем пирамиды ABCD

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\cdot147 = \frac{49}{2} = 24{,}5$$

3. Сила F приложена к точке A. Вычислить: а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B; б) модуль момента силы F относительно точки B.

3.0 F = (3, –2, 1), A(3, 3, 2), B(5, 1, –3)

а) работу силы F в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B;

Так как $A = F \cdot s$,

$$s = \overline{AB} = (5-3, 1-3, -3-2) = (2, -2, -5), \text{ то}$$

$$A = F \cdot \overline{AB} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot (-5) = 6 + 4 - 5 = 5$$

$$A = 5$$

б) модуль момента силы F относительно точки B.

Момент силы $M = \overline{BA} \times F$,

$$\overline{BA} = (-2, 2, 5)$$

Векторное произведение $a \times b$ выражается через координаты данных векторов a и b следующим образом:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

Вычисляем:

$$\overline{BA} \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (2+10)i - (-2-15)j + (4-6)k = 12i + 17j - 2k$$

Модуль определяем выражением

$$|a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Следовательно модуль момента силы F относительно точки B.

$$|M| = |\overline{BA} \times F| = \sqrt{12^2 + 17^2 + (-2)^2} = \sqrt{144 + 289 + 4} = \sqrt{437} = 20{,}9$$