

### ИДЗ 3.1 – Вариант 0

Даны четыре точки  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3, z_3)$ ,  $A_4(x_4, y_4, z_4)$

Составить уравнения:

а) плоскости  $A_1A_2A_3$ ; б) прямой  $A_1A_2$ ;

в) прямой  $A_4M$ , перпендикулярной к плоскости  $A_1A_2A_3$ ;

г) прямой  $A_3N$ , параллельной прямой  $A_1A_2$ ;

д) плоскости, проходящей через точку  $A_4$  перпендикулярно к прямой  $A_1A_2$ .

Вычислить:

е) синус угла между прямой  $A_1A_4$  и плоскостью  $A_1A_2A_3$ ;

ж) косинус угла между координатной плоскостью  $Oxy$  и плоскостью  $A_1A_2A_3$ ;

**1.0**  $A_1(2, -3, 5)$ ,  $A_2(6, 8, -3)$ ,  $A_3(2, 6, -4)$ ,  $A_4(8, 4, 7)$

**а) уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$**

Используя формулу уравнения плоскости по трем точкам  $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ , составляем

уравнение плоскости  $A_1A_2A_3$ :

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y + 3 & z - 5 \\ 6 - 2 & 8 + 3 & -3 - 5 \\ 2 - 2 & 6 + 3 & -4 - 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 2 & y + 3 & z - 5 \\ 4 & 11 & -8 \\ 0 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - 2)(-99 + 72) - (y + 3)(-36 + 0) + (z - 5)(36 - 0) = 0$$

$$-27(x - 2) + 36(y + 3) + 36(z - 5) = 0$$

$$-27x + 54 + 36y + 108 + 36z - 180 = 0$$

$$-27x + 36y + 36z - 18 = 0$$

$$3x - 4y - 4z + 2 = 0 - \text{уравнение плоскости } A_1A_2A_3$$

**б) прямой  $A_1A_2$**

Учитывая уравнения прямой, проходящей через две точки, уравнения  $A_1A_2$  можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \text{ получаем:}$$

$$\frac{x - 2}{6 - 2} = \frac{y + 3}{8 + 3} = \frac{z - 5}{-3 - 5}, \text{ тогда}$$

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 3}{11} = \frac{z - 5}{-8} - \text{уравнение прямой } A_1A_2$$

**в) прямой  $A_4M$ , перпендикулярной к плоскости  $A_1A_2A_3$**

Из условия перпендикулярности прямой  $A_4M$  и плоскости  $A_1A_2A_3$  следует, что в качестве направляющего вектора  $s$  можно взять нормальный вектор  $n = (3, -4, -4)$  плоскости  $A_1A_2A_3$ . Тогда

уравнение прямой  $A_4M$  с учетом уравнений  $\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}$ , запишется в виде

$$\frac{x - 8}{3} = \frac{y - 4}{-4} = \frac{z - 7}{-4}$$

**г) прямой  $A_3N$ , параллельной прямой  $A_1A_2$ ;**

Так как прямая  $A_3N$  параллельная прямой  $A_1A_2$ , то их направляющие векторы  $s_1 = s_2 = (4, 11, -8)$

Следовательно, уравнение прямой  $A_3N$  имеет вид

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 6}{11} = \frac{z + 4}{-8}$$

**д) плоскости, проходящей через точку  $A_4$  перпендикулярно к прямой  $A_1A_2$ .**

Т.к. искомая плоскость перпендикулярна прямой  $A_1A_2$ , то её нормальным вектором будет

$$A_1A_2 = (4, 11, -8)$$

Получаем уравнение:

$$4(x - 8) + 11(y - 4) - 8(z - 7) = 0$$

$$4x - 32 + 11y - 44 - 8z + 56 = 0$$

$$4x + 11y - 8z - 20 = 0$$

**е) синус угла между прямой  $A_1A_4$  и плоскостью  $A_1A_2A_3$**

Уравнение прямой  $A_1A_4$

$$\frac{x - 2}{8 - 2} = \frac{y + 3}{4 + 3} = \frac{z - 5}{7 - 5}, \text{ тогда}$$

$$\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 3}{7} = \frac{z - 5}{2}$$

$$3x - 4y - 4z + 2 = 0 - \text{уравнение плоскости } A_1A_2A_3$$

По формуле  $\sin \varphi = \frac{|Ak + Bl + Cm|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}}$  вычисляем угол между прямой и плоскостью

$$\sin \varphi = \frac{|3 \cdot 6 + (-4) \cdot 7 + (-4) \cdot 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-4)^2} \sqrt{6^2 + 7^2 + 2^2}} = \frac{|18 - 28 - 8|}{\sqrt{9 + 16 + 16} \cdot \sqrt{36 + 49 + 4}} = \frac{18}{6,403 \cdot 9,43} = 0,298$$

$$\varphi = \arcsin(0,298) \approx 17^\circ$$

**ж) косинус угла между координатной плоскостью  $Oxy$  и плоскостью  $A_1A_2A_3$ ;**

Согласно формуле

$$\cos \varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| |n_2|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$n_1 = (0, 0, 1); n_2 = (3, -4, -4)$$

Находим косинус угла между плоскостью  $Oxy$  и плоскостью  $A_1A_2A_3$

$$\cos \varphi = \frac{0 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 1 \cdot (-4)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-4)^2}} = \frac{-4}{\sqrt{41}} = \frac{-4}{6,403} = -0,625$$

## 2. Решить следующие задачи

2.0 Написать уравнение плоскости проходящей через точки  $C(0;1;2)$   $D(-5;2;3)$   $E(1; -2;1)$

### Решение:

Используя формулу уравнения плоскости по трем точкам

$$\begin{vmatrix} x - x_C & y - y_C & z - z_C \\ x_D - x_C & y_D - y_C & z_D - z_C \\ x_E - x_C & y_E - y_C & z_E - z_C \end{vmatrix} = 0,$$

составляем уравнение плоскости СДЕ:

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 1 & z - 2 \\ -5 - 0 & 2 - 1 & 3 - 2 \\ 1 - 0 & -2 - 1 & 1 - 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y - 1 & z - 2 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3)) - (y - 1)((-5) \cdot (-1) - 1 \cdot 1) + (z - 2)((-5) \cdot (-3) - 1 \cdot 1) = 0$$

$$x(-1 + 3) - (y - 1)(5 - 1) + (z - 2)(15 - 1) = 0$$

$$2x - 4(y - 1) + 14(z - 2) = 0$$

$$2x - 4y + 4 + 14z - 28 = 0$$

$$2x - 4y + 14z - 24 = 0$$

$$x - 2y + 7z - 12 = 0 - \text{уравнение плоскости СДЕ}$$

Ответ:  $x - 2y + 7z - 12 = 0$  – уравнение плоскости СДЕ

## 3. Решить следующие задачи

3.0 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(-4; -2; 5)$  и перпендикулярно вектору  $\overline{AB}$ , если  $A(3; -3; -7)$ ,  $B(9; 3; -7)$

### Решение:

$$\text{Вектор } \overline{AB}(9 - 3, 3 - (-3), -7 - (-7)) = (6, 6, 0)$$

Он является нормальным искомой плоскости.

$$\vec{n} = (A, B, C) = \overline{AB}(6, 6, 0)$$

Всякий (не равный нулю) вектор, перпендикулярный к данной плоскости, называется ее нормальным вектором. Уравнение определяет плоскость, проходящую через точку  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  имеющей

нормальный вектор  $\vec{n} = (A, B, C)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Подставляем данные, получаем:

$$6(x + 4) + 6(y + 2) + 0(z - 5) = 0$$

$$6x + 24 + 6y + 12 = 0$$

$$6x + 6y + 36 = 0$$

$$x + y + 6 = 0$$

Ответ:  $x + y + 6 = 0$