ИДЗ 3.1 – Вариант 0

Даны четыре точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, $A_4(x_4, y_4, z_4)$
Составить уравнения:
а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2;
в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;
г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;
д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Вычислить:
е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$;

1.0 $A_1(2, -3, 5)$, $A_2(6, 8, -3)$, $A_3(2, 6, -4)$, $A_4(8, 4, 7)$

а) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$

Используя формулу уравнения плоскости по трем точкам $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$, составляем уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-5 \\ 6-2 & 8+3 & -3-5 \\ 2-2 & 6+3 & -4-5 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-5 \\ 4 & 11 & -8 \\ 0 & 9 & -9 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-2)(-99+72)-(y+3)(-36+0)+(z-5)(36-0)=0$$

$$-27(x-2)+36(y+3)+36(z-5)=0$$

$$-27x+54+36y+108+36z-180=0$$

$$-27x+36y+36z-18=0$$

$$3x-4y-4z+2=0 - \text{уравнение плоскости } A_1A_2A_3$$

б) прямой A_1A_2

Учитывая уравнения прямой, проходящей через две точки, уравнения A_1A_2 можно записать в виде $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, получаем:

$\frac{x-2}{6-2}=\frac{y+3}{8+3}=\frac{z-5}{-3-5}$, тогда

$\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{11}=\frac{z-5}{-8}$ – уравнение прямой A_1A_2

в) прямой A_4M, перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$

Из условия перпендикулярности прямой A_4M и плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что в качестве направляющего вектора s можно взять нормальный вектор $n=(3, -4, -4)$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда уравнение прямой A_4M с учетом уравнений $\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}$, запишется в виде

$$\frac{x-8}{3}=\frac{y-4}{-4}=\frac{z-7}{-4}$$

г) прямой A_3N, параллельной прямой A_1A_2;

Так как прямая A_3N параллельная прямой A_1A_2, то их направляющие векторы $s_1=s_2=(4, 11, -8)$
Следовательно, уравнение прямой A_3N имеет вид

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-6}{11}=\frac{z+4}{-8}$$

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2.
Т.к. искомая плоскость перпендикулярна прямой A_1A_2, то её нормальным вектором будет
$A_1A_2 = (4, 11, -8)$
Получаем уравнение:
$4(x-8)+11(y-4)-8(z-7)=0$
$4x-32+11y-44-8z+56=0$
$4x+11y-8z-20=0$

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$
Уравнение прямой A_1A_4
$\frac{x-2}{8-2}=\frac{y+3}{4+3}=\frac{z-5}{7-5}$, тогда
$\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-5}{2}$
$3x-4y-4z+2=0$ – уравнение плоскости $A_1A_2A_3$
По формуле $\sin\varphi = \frac{|Ak+Bl+Cm|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{k^2+l^2+m^2}}$ вычисляем угол между прямой и плоскостью
$$\sin\varphi = \frac{|3\cdot 6+(-4)\cdot 7+(-4)\cdot 2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-4)^2}\sqrt{6^2+7^2+2^2}} = \frac{|18-28-8|}{\sqrt{9+16+16}\cdot\sqrt{36+49+4}} = \frac{18}{6{,}403\cdot 9{,}43} = 0{,}298$$
$\varphi = \arcsin(0{,}298) \approx 17^\circ$

ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$;
Согласно формуле
$$\cos\varphi = \frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$
$n_1=(0, 0, 1)$; $n_2=(3, -4, -4)$
Находим косинус угла между плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$
$$\cos\varphi = \frac{0\cdot 3+0\cdot(-4)+1\cdot(-4)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{3^2+(-4)^2+(-4)^2}} = \frac{-4}{\sqrt{41}} = \frac{-4}{6{,}403} = -0{,}625$$

2. Решить следующие задачи

2.0 Написать уравнение плоскости проходящей через точки С(0;1;2) Д(−5;2;3) Е(1; −2;1)

Решение:

Используя формулу уравнения плоскости по трем точкам

$$\begin{vmatrix} x-x_C & y-y_C & z-z_C \\ x_Д-x_C & y_Д-y_C & z_Д-z_C \\ x_E-x_C & y_E-y_C & z_E-z_C \end{vmatrix}=0,$$

составляем уравнение плоскости СДЕ:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-2 \\ -5-0 & 2-1 & 3-2 \\ 1-0 & -2-1 & 1-2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ -5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$x(1\cdot(-1)-1\cdot(-3))-(y-1)((-5)\cdot(-1)-1\cdot 1)+(z-2)((-5)\cdot(-3)-1\cdot 1)=0$$

$$x(-1+3)-(y-1)(5-1)+(z-2)(15-1)=0$$

$$2x-4(y-1)+14(z-2)=0$$

$$2x-4y+4+14z-28=0$$

$$2x-4y+14z-24=0$$

$x-2y+7z-12=0$ – уравнение плоскости СДЕ

Ответ: $x-2y+7z-12=0$ – уравнение плоскости СДЕ

3. Решить следующие задачи

3.0 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку М(−4; −2; 5) и перпендикулярно вектору АВ, если А (3; −3; −7), В (9; 3; −7)

Решение:

Вектор $\overline{AB}(9-3,\ 3-(-3),\ -7-(-7))=(6,\ 6,\ 0)$

Он является нормальным искомой плоскости.

$$\overline{n}=(A,B,C)=\overline{AB}(6,\ 6,\ 0)$$

Всякий (не равный нулю) вектор, перпендикулярный к данной плоскости, называется ее нормальным вектором. Уравнение определяет плоскость, проходящую через точку и $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ имеющей нормальный вектор $\overline{n}=(A,B,C)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Подставляем данные, получаем:

$$6(x+4)+6(y+2)+0(z-5)=0$$

$$6x+24+6y+12=0$$

$$6x+6y+36=0$$

$$x+y+6=0$$

Ответ: $x+y+6=0$