

ИДЗ 5.2 – Вариант 0

1. Доказать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \rightarrow 0$ являются бесконечно малыми одного порядка малости.

1.0 $f(x) = \sin(x^2 - 3x)$, $\varphi(x) = x^4 - 27x$

Находим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 3x)}{x^4 - 27x} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

В числителе $\sin \alpha x \sim \alpha x$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 3x)}{x^4 - 27x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x^4 - 27x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-3)}{x(x^3 - 27)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{(x^3 - 27)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 3x + 9} = \frac{1}{0^2 + 3 \cdot 0 + 9} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Так как предел отличен от нуля $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{9} \neq 0$ в этом случае $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка малости.

2. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

2.0 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{8x} - 1}{\sin 4x}$

Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых.

$$e^{\alpha x} - 1 \sim \alpha x$$

$$\sin \alpha x \sim \alpha x$$

Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{8x} - 1}{\sin 4x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{4x} = \frac{8}{4} = 2$$

3. Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики.

$$3.0 \ f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{если } x < 0 \\ x^2 - 1, & \text{если } 0 \leq x < 3 \\ \sqrt{x+1}, & \text{если } x \geq 3 \end{cases}$$

При исследовании функции, заданной несколькими аналитическими выражениями следует рассматривать граничные точки: т.е. точки перехода от одного вида функции к другой.

Точки разрыва $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

1) Находим пределы функции в указанных точках

Для точки $x_1 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} x - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 - 1 = -1$$

В точке $x_1 = 0$ предел существует и равен -1 .

В точке $x_1 = 0$ функция непрерывна.

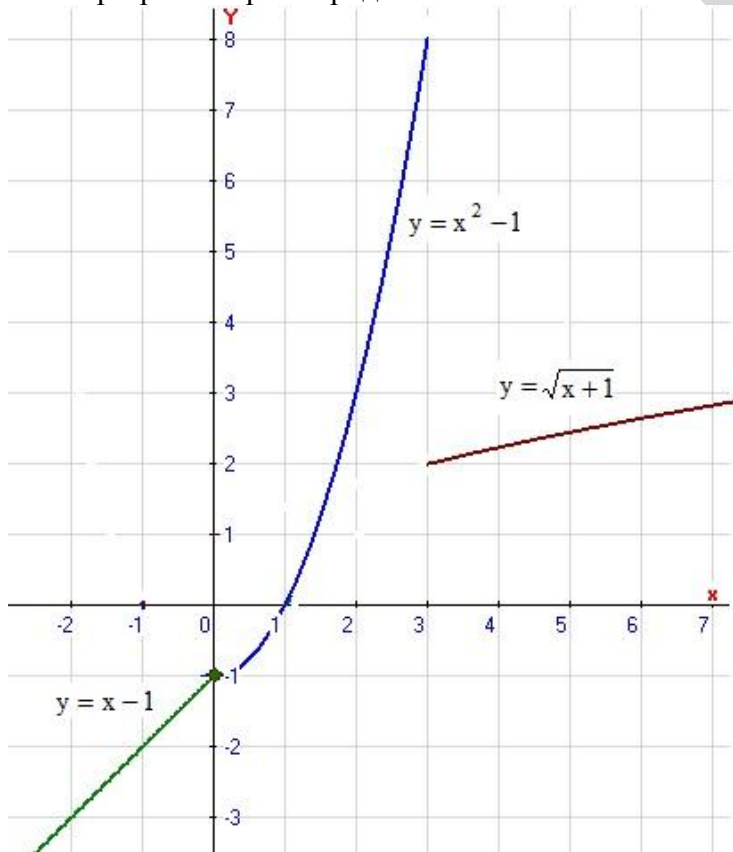
Для точки $x_2 = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} x^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} \sqrt{x+1} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x)$$

Точка разрыва первого рода



4. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках.

4.0 $f(x) = 6^{\frac{3}{x+4}} + 3$; $x_1 = -4$, $x_2 = 2$

Для точки $x_1 = -4$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow -4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4-0} 6^{\frac{3}{x+4}} + 3 = 6^{-\infty} + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4+0} 6^{\frac{3}{x+4}} + 3 = 6^{\infty} + 3 = \infty$$

Т.е. в точке $x_1 = -4$ функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв ($x_1 = -4$ - точка разрыва второго рода).

Для точки $x_2 = 2$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} 6^{\frac{3}{x+4}} + 3 = 6^{\frac{3}{6}} + 3 = 6^{\frac{1}{2}} + 3 = 2,45 + 3 = 5,45$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} 6^{\frac{3}{x+4}} + 3 = 6^{\frac{3}{6}} + 3 = 6^{\frac{1}{2}} + 3 = 2,45 + 3 = 5,45$$

Следовательно, в точке $x_2 = 2$ функция $f(x)$ непрерывна.

