ИДЗ 6.1 – Вариант 0

Продифференцировать данные функции

1.0 $y=\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x}+6x^5-\sqrt[3]{x^2}$

Применим формулы: $(u+v)'=u'+v'$, а также $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$,
Получаем:

$$y'=\left(\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x}+6x^5-\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(\frac{2}{x^3}\right)'-\left(\frac{5}{x}\right)'+\left(6x^5\right)'-\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=-2\cdot 3x^{-3-1}+5x^{-1-1}+6\cdot 5x^{5-1}-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=$$
$$=-6x^{-4}+5x^{-2}+30x^4-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=-\frac{6}{x^4}+\frac{5}{x^2}+30x^4-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

2.0 $y=\sqrt[5]{(x+8)^4}+\frac{6}{3x^2-7x+9}$

Применим формулы: $(u+v)'=u'+v'$, а также $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$
Получаем:

$$y'=\left(\sqrt[5]{(x+8)^4}+\frac{6}{3x^2-7x+9}\right)'=\left(\sqrt[5]{(x+8)^4}\right)'+\left(\frac{6}{3x^2-7x+9}\right)'=\left((x+8)^{\frac{4}{5}}\right)'+\left(6\left(3x^2-7x+9\right)^{-1}\right)'=$$
$$=\left(\frac{4}{5}(x+8)^{\frac{4}{5}-1}\right)\cdot(x+8)'-\left(6\left(3x^2-7x+9\right)^{-1-1}\right)\cdot\left(3x^2-7x+9\right)'=\frac{4}{5}(x+8)^{-\frac{1}{5}}-$$
$$-6\left(3x^2-7x+9\right)^{-2}\cdot(6x-7)=\frac{4}{5\sqrt[5]{x+8}}-\frac{6\cdot(6x-7)}{\left(3x^2-7x+9\right)^2}.$$

3.0 $y=\sin^3 4x\cdot\arccos 2x^3$

Применим формулу: производная произведения $(uv)'=u'v+uv'$, а также $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\sin x)'=\cos x$, $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$
Получаем:

$$y'=\left(\sin^3 4x\cdot\arccos 2x^3\right)'=\left(\sin^3 4x\right)'\cdot\arccos 2x^3+\sin^3 4x\cdot\left(\arccos 2x^3\right)'=3\sin^{3-1}4x(\sin 4x)'\cdot\arccos 2x^3+$$
$$+\sin^3 4x\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\left(2x^3\right)^2}}\cdot\left(2x^3\right)'=3\cdot 4\sin^2 4x\cdot\cos 4x\cdot\arccos 2x^3-\sin^3 4x\cdot\frac{2\cdot 3x^{3-1}}{\sqrt{1-4x^6}}=$$
$$=12\sin^2 4x\cdot\cos 4x\cdot\arccos 2x^3-\frac{6x^2\cdot\sin^3 4x}{\sqrt{1-4x^6}}$$

4.0 $y=\ell og_4(x+8)\cdot\mathrm{arcctg}^3 x^5$

Применим формулы: $(u\cdot v)'=u'v+uv'$, а также $(\mathrm{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$ $\quad(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$
Производная сложной функции равна произведению производных от функций, ее составляющих.
Пусть $y=f(x)$, $u=g(x)$, Тогда $y'=f'(u)\cdot u'(x)$
Получаем:

$$y'=\left(\log_4(x+8)\cdot \operatorname{arcctg}^3 x^5\right)'=\left(\log_4(x+8)\right)'\cdot \operatorname{arcctg}^3 x^5+\log_4(x+8)\cdot\left(\operatorname{arcctg}^3 x^5\right)'=$$
$$=\frac{1}{(x+8)\ln 4}\cdot \operatorname{arcctg}^3 x^5+3\log_4(x+8)\cdot \operatorname{arcctg}^{3-1} x^5\cdot\left(\operatorname{arcctg} x^5\right)'=\frac{\operatorname{arcctg}^3 x^5}{(x+8)\ln 4}+$$
$$+3\log_4(x+8)\cdot \operatorname{arcctg}^2 x^5\cdot\frac{-1}{1+\left(x^5\right)^2}\left(x^5\right)'=\frac{\operatorname{arcctg}^3 x^5}{(x+8)\ln 4}-3\log_4(x+8)\cdot\frac{5x^{5-1}\operatorname{arcctg}^2 x^5}{1+x^{10}}=$$
$$=\frac{\operatorname{arcctg}^3 x^5}{(x+8)\ln 4}-\log_4(x+8)\cdot\frac{15x^4\operatorname{arcctg}^2 x^5}{1+x^{10}}$$

5.0 $y=\sqrt[3]{(x-4)^5}\cdot \arcsin^2 x$

Применим формулы: $(u\cdot v)'=u'v+uv'$, а также $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$

Производная сложной функции равна произведению производных от функций, ее составляющих.
Пусть $y=f(x)$, $u=g(x)$, Тогда $y'=f'(u)\cdot u'(x)$
Получаем:

$$y'=\left(\sqrt[3]{(x-4)^5}\cdot \arcsin^2 x\right)'=\left(\sqrt[3]{(x-4)^5}\right)'\cdot \arcsin^2 x+\sqrt[3]{(x-4)^5}\cdot\left(\arcsin^2 x\right)'=$$
$$=\frac{5}{3}(x-4)^{\frac{5}{3}-1}\cdot(x-4)'\cdot \arcsin^2 x+2\sqrt[3]{(x-4)^5}\cdot \arcsin^{2-1} x\cdot(\arcsin x)'=\frac{5}{3}(x-4)^{\frac{2}{3}}\cdot \arcsin^2 x+$$
$$+2\sqrt[3]{(x-4)^5}\cdot \arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{5}{3}\sqrt[3]{(x-4)^2}\cdot \arcsin^2 x+2\sqrt[3]{(x-4)^5}\cdot\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

6.0 $y=\operatorname{th}^6 3x\cdot \operatorname{arctg}(3x+7)$

Применим формулу: производная произведения $(uv)'=u'v+uv'$, а также $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$,

$\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

Получаем:

$$y'=\left(\operatorname{th}^6 3x\cdot \operatorname{arctg}(3x+7)\right)'=\left(\operatorname{th}^6 3x\right)'\cdot \operatorname{arctg}(3x+7)+\operatorname{th}^6 3x\cdot\left(\operatorname{arctg}(3x+7)\right)'=$$
$$=6\operatorname{th}^{6-1}3x\cdot(\operatorname{th}3x)'\cdot \operatorname{arctg}(3x+7)+\operatorname{th}^6 3x\cdot\frac{1}{1+(3x+7)^2}\cdot(3x+7)'=$$
$$=6\operatorname{th}^5 3x\cdot\frac{3}{\operatorname{ch}^2 3x}\cdot \operatorname{arctg}(3x+7)+\operatorname{th}^6 3x\cdot\frac{3}{1+(3x+7)^2}=18\operatorname{th}^5 3x\cdot\frac{\operatorname{arctg}(3x+7)}{\operatorname{ch}^2 3x}+\frac{3\operatorname{th}^6 3x}{1+(3x+7)^2}$$

7.0 $y=\frac{e^{\sin x}}{3x^2+5x-2}$

Применим формулу: производная частного $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, а также $\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $\left(e^x\right)'=e^x$,

$(\sin x)'=\cos x$

Получаем:

$$y'=\left(\frac{e^{\sin x}}{3x^2+5x-2}\right)'=\frac{\left(e^{\sin x}\right)'\left(3x^2+5x-2\right)-e^{\sin x}\cdot\left(3x^2+5x-2\right)'}{\left(3x^2+5x-2\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{\sin x}\cdot(\sin x)'\cdot\left(3x^2+5x-2\right)-e^{\sin x}\cdot(6x+5)}{\left(3x^2+5x-2\right)^2}=\frac{e^{\sin x}\cos x\cdot\left(3x^2+5x-2\right)-e^{\sin x}\cdot(6x+5)}{\left(3x^2+5x-2\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{\sin x}\cos x}{3x^2+5x-2}-\frac{e^{\sin x}\cdot(6x+5)}{\left(3x^2+5x-2\right)^2}$$

8.0 $y=\dfrac{\sin^3 5x}{\ell g\left(3x^2-2x+6\right)}$

Применим формулу: производная частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, а также $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}x'$, $(\sin x)'=\cos x$, $\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$

Получаем:

$$y'=\left(\frac{\sin^3 5x}{\ell g\left(3x^2-2x+6\right)}\right)'=\frac{\left(\sin^3 5x\right)'\cdot\ell g\left(3x^2-2x+6\right)-\sin^3 5x\cdot\left(\ell g\left(3x^2-2x+6\right)\right)'}{\ell g^2\left(3x^2-2x+6\right)}=$$

$$=\frac{3\sin^{3-1}5x\cdot(\sin 5x)'\cdot\ell g\left(3x^2-2x+6\right)-\sin^3 5x\cdot\dfrac{1}{\left(3x^2-2x+6\right)\ell n10}\cdot\left(3x^2-2x+6\right)'}{\ell g^2\left(3x^2-2x+6\right)}=$$

$$=\frac{3\sin^2 5x\cdot 5\cos 5x\cdot\ell g\left(3x^2-2x+6\right)-\sin^3 5x\cdot\dfrac{6x-2}{\left(3x^2-2x+6\right)\ell n10}}{\ell g^2\left(3x^2-2x+6\right)}=$$

$$=\frac{15\sin^2 5x\cos 5x}{\ell g\left(3x^2-2x+6\right)}-\frac{(6x-2)\sin^3 5x}{\left(3x^2-2x+6\right)\ell n10\cdot\ell g^2\left(3x^2-2x+6\right)}$$

9.0 $y=\dfrac{\sqrt[3]{ch2x}}{arctg(3x+7)}$

Применим формулу: производная частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, а также $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, $(chx)'=shx$, $\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$,

Получаем:

$$y'=\left(\frac{\sqrt[3]{ch2x}}{arctg(3x+7)}\right)'=\frac{\left(\sqrt[3]{ch2x}\right)'arctg(3x+7)-\sqrt[3]{ch2x}\cdot(arctg(3x+7))'}{arctg^2(3x+7)}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{3}ch^{\frac{1}{3}-1}2x\cdot(ch2x)'\cdot arctg(3x+7)-\sqrt[3]{ch2x}\cdot\dfrac{1}{1+(3x+7)^2}\cdot(3x+7)'}{arctg^2(3x+7)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\mathrm{ch}^{-\frac{2}{3}}2x\cdot 2\mathrm{sh}2x\cdot \mathrm{arctg}(3x+7)-\sqrt[3]{\mathrm{ch}2x}\cdot\frac{3}{1+(3x+7)^2}}{\mathrm{arctg}^2(3x+7)}=\frac{\frac{2\mathrm{sh}2x\cdot\mathrm{arctg}(3x+7)}{3\sqrt[3]{\mathrm{ch}^2 2x}}-\frac{3\sqrt[3]{\mathrm{ch}2x}}{1+(3x+7)^2}}{\mathrm{arctg}^2(3x+7)}=$$

$$=\frac{2\mathrm{sh}2x}{3\sqrt[3]{\mathrm{ch}^2 2x}\cdot\mathrm{arctg}(3x+7)}-\frac{3\sqrt[3]{\mathrm{ch}2x}}{\left(1+(3x+7)^2\right)\cdot\mathrm{arctg}^2(3x+7)}$$

10.0 $y=\dfrac{3\ell g(8x-1)}{(x+6)^4}$

Применим формулу: производная частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, а также $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\cdot x'$, $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

Получаем:

$$y'=\left(\frac{3\ell g(8x-1)}{(x+6)^4}\right)'=\frac{(3\ell g(8x-1))'\cdot(x+6)^4-3\ell g(8x-1)\cdot\left((x+6)^4\right)'}{(x+6)^8}=$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{(8x-1)\ell n10}\right)\cdot(8x-1)'\cdot(x+6)^4-4\cdot 3\ell g(8x-1)\cdot(x+6)^{4-1}\cdot(x+6)'}{(x+6)^8}=$$

$$=\frac{\left(\frac{3\cdot 8}{(8x-1)\ell n10}\right)\cdot(x+6)^4-12\ell g(8x-1)\cdot(x+6)^3}{(x+6)^8}=\frac{24}{(8x-1)\ell n10\cdot(x+6)^4}-\frac{12\ell g(8x-1)}{(x+6)^5}$$

11.0 $y=\sqrt[8]{\dfrac{2x+3}{2x-3}}\cdot\arcsin 5x$

Применим формулу: производная произведения $(uv)'=u'v+uv'$, производная частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$,

а также $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

Получаем:

$$y'=\left(\sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}}\cdot\arcsin 5x\right)'=\left(\sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}}\right)'\cdot\arcsin 5x+\sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}}\cdot(\arcsin 5x)'=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^{\frac{1}{8}-1}\cdot\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)'\cdot\arcsin 5x+\sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\cdot(5x)'=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^{-\frac{7}{8}}\left(\frac{(2x+3)'\cdot(2x-3)-(2x+3)\cdot(2x-3)'}{(2x-3)^2}\right)\arcsin 5x+\sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}}\cdot\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}=$$

$$=\frac{1}{8\sqrt[8]{\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^7}}\left(\frac{2\cdot(2x-3)-2(2x+3)}{(2x-3)^2}\right)\arcsin 5x+\sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}}\cdot\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}=$$

$$=\frac{1}{8\sqrt[8]{\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^7}}\left(\frac{-12}{(2x-3)^2}\right)\arcsin 5x+\sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}}\cdot\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

12.0 $y=(\cos 5x)^{\ell n3x}$

Производная функции, заданной неявно

$$y=[u(x)]^{v(x)}$$

$$\ln y = v\ln u$$

$$\frac{y'}{y}=v'\ln u+v\frac{u'}{u}$$

$$y'=y\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right)$$

Логарифмируя данную функцию, получаем

$$\ell ny=\ell n3x\cdot\ell n(\cos 5x)$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по x

$$(\ell ny)'=(\ell n3x)'\cdot\ell n(\cos 5x)+\ell n3x\cdot(\ell n(\cos 5x))'$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3x}\cdot(3x)'\cdot\ell n(\cos 5x)+\ell n3x\cdot\frac{1}{\cos 5x}\cdot(\cos 5x)'$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{3x}\cdot\ell n(\cos 5x)+\ell n3x\cdot\frac{1}{\cos 5x}\cdot(-5\sin 5x)$$

Далее

$$y'=y\left(\frac{\ell n(\cos 5x)}{x}-\frac{5\sin 5x\cdot\ell n3x}{\cos 5x}\right)$$

Окончательно имеем

$$y'=(\cos 5x)^{\ell n3x}\left(\frac{\ell n(\cos 5x)}{x}-\frac{5\sin 5x\cdot\ell n3x}{\cos 5x}\right)$$

13.0 $y = (\cos(8x+3))^{tg2x}$

Производная функции, заданной неявно

$$y = [u(x)]^{v(x)}$$

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$$

$$y' = y\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)$$

Логарифмируя данную функцию, получаем

$$\ell ny = tg2x \cdot \ell n(\cos(8x+3))$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по x

$$(\ell ny)' = (tg2x)' \cdot \ell n(\cos(8x+3)) + tg2x \cdot (\ell n(\cos(8x+3)))'$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 2x}(2x)' \cdot \ell n(\cos(8x+3)) + tg2x \cdot \frac{1}{\cos(8x+3)}(\cos(8x+3))'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{\cos^2 2x} \cdot \ell n(\cos(8x+3)) - tg2x \cdot \frac{1}{\cos(8x+3)}\sin(8x+3)(8x+3)'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{\cos^2 2x} \cdot \ell n(\cos(8x+3)) - tg2x \cdot \frac{8\sin(8x+3)}{\cos(8x+3)}$$

Далее

$$y' = y\left(\frac{2\ell n(\cos(8x+3))}{\cos^2 2x} - \frac{8tg2x \cdot \sin(8x+3)}{\cos(8x+3)}\right)$$

Окончательно имеем

$$y' = (\cos(8x+3))^{tg2x}\left(\frac{2\ell n(\cos(8x+3))}{\cos^2 2x} - \frac{8tg2x \cdot \sin(8x+3)}{\cos(8x+3)}\right)$$

14.0 $y = \dfrac{\sqrt[3]{(x+7)^2}}{(x-5)^2 \cdot (x-2)^6}$

Применяя метод логарифмического дифференцирования, последовательно находим:

$$\ell ny = \frac{2}{3}\ell n(x+7) - (2\ell n(x-5) + 6\ell n(x-2))$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{3(x+7)} \cdot (x+7)' - \frac{2}{x-5} \cdot (x-5)' - \frac{6}{x-2} \cdot (x-2)'$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{3(x+7)} - \frac{2}{x-5} - \frac{6}{x-2}$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{2}{3(x+7)} - \frac{2}{x-5} - \frac{6}{x-2}\right)$$

Окончательно получаем:

$$y' = \frac{\sqrt[3]{(x+7)^2}}{(x-5)^2 \cdot (x-2)^6} \cdot \left(\frac{2}{3(x+7)} - \frac{2}{x-5} - \frac{6}{x-2}\right)$$