

ИДЗ 6.1 – Вариант 0

Продифференцировать данные функции

$$1.0 \quad y = \frac{2}{x^3} - \frac{5}{x} + 6x^5 - \sqrt[3]{x^2}$$

Применим формулы: $(u + v)' = u' + v'$, а также $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,

Получаем:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{2}{x^3} - \frac{5}{x} + 6x^5 - \sqrt[3]{x^2} \right)' = \left(\frac{2}{x^3} \right)' - \left(\frac{5}{x} \right)' + (6x^5)' - (\sqrt[3]{x^2})' = -2 \cdot 3x^{-3-1} + 5x^{-1-1} + 6 \cdot 5x^{5-1} - \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \\ &= -6x^{-4} + 5x^{-2} + 30x^4 - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{6}{x^4} + \frac{5}{x^2} + 30x^4 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

$$2.0 \quad y = \sqrt[5]{(x+8)^4} + \frac{6}{3x^2 - 7x + 9}$$

Применим формулы: $(u + v)' = u' + v'$, а также $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Получаем:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt[5]{(x+8)^4} + \frac{6}{3x^2 - 7x + 9} \right)' = \left(\sqrt[5]{(x+8)^4} \right)' + \left(\frac{6}{3x^2 - 7x + 9} \right)' = \left((x+8)^{\frac{4}{5}} \right)' + \left(6(3x^2 - 7x + 9)^{-1} \right)' = \\ &= \left(\frac{4}{5}(x+8)^{\frac{4}{5}-1} \right) \cdot (x+8)' - \left(6(3x^2 - 7x + 9)^{-1-1} \right) \cdot (3x^2 - 7x + 9)' = \frac{4}{5}(x+8)^{-\frac{1}{5}} - \\ &- 6(3x^2 - 7x + 9)^{-2} \cdot (6x - 7) = \frac{4}{5\sqrt[5]{x+8}} - \frac{6 \cdot (6x - 7)}{(3x^2 - 7x + 9)^2} \end{aligned}$$

$$3.0 \quad y = \sin^3 4x \cdot \arccos 2x^3$$

Применим формулу: производная произведения $(uv)' = u'v + uv'$, а также $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(\sin x)' = \cos x$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Получаем:

$$\begin{aligned} y' &= (\sin^3 4x \cdot \arccos 2x^3)' = (\sin^3 4x)' \cdot \arccos 2x^3 + \sin^3 4x \cdot (\arccos 2x^3)' = 3 \sin^{3-1} 4x (\sin 4x)' \cdot \arccos 2x^3 + \\ &+ \sin^3 4x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-(2x^3)^2}} \cdot (2x^3)' = 3 \cdot 4 \sin^2 4x \cdot \cos 4x \cdot \arccos 2x^3 - \sin^3 4x \cdot \frac{2 \cdot 3x^{3-1}}{\sqrt{1-4x^6}} = \\ &= 12 \sin^2 4x \cdot \cos 4x \cdot \arccos 2x^3 - \frac{6x^2 \cdot \sin^3 4x}{\sqrt{1-4x^6}} \end{aligned}$$

$$4.0 \quad y = \log_4(x+8) \cdot \operatorname{arctg}^3 x^5$$

Применим формулы: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, а также $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Производная сложной функции равна произведению производных от функций, ее составляющих.

Пусть $y = f(x)$, $u = g(x)$, Тогда $y' = f'(u) \cdot u'(x)$

Получаем:

$$\begin{aligned}
 y' &= (\log_4(x+8) \cdot \operatorname{arctg}^3 x^5)' = (\log_4(x+8))' \cdot \operatorname{arctg}^3 x^5 + \log_4(x+8) \cdot (\operatorname{arctg}^3 x^5)' = \\
 &= \frac{1}{(x+8)\ln 4} \cdot \operatorname{arctg}^3 x^5 + 3\log_4(x+8) \cdot \operatorname{arctg}^{3-1} x^5 \cdot (\operatorname{arctg} x^5)' = \frac{\operatorname{arctg}^3 x^5}{(x+8)\ln 4} + \\
 &+ 3\log_4(x+8) \cdot \operatorname{arctg}^2 x^5 \cdot \frac{-1}{1+(x^5)^2} (x^5)' = \frac{\operatorname{arctg}^3 x^5}{(x+8)\ln 4} - 3\log_4(x+8) \cdot \frac{5x^{5-1} \operatorname{arctg}^2 x^5}{1+x^{10}} = \\
 &= \frac{\operatorname{arctg}^3 x^5}{(x+8)\ln 4} - \log_4(x+8) \cdot \frac{15x^4 \operatorname{arctg}^2 x^5}{1+x^{10}}
 \end{aligned}$$

5.0 $y = \sqrt[3]{(x-4)^5} \cdot \arcsin^2 x$

Применим формулы: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, а также $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Производная сложной функции равна произведению производных от функций, ее составляющих. Пусть $y = f(x)$, $u = g(x)$, Тогда $y' = f'(u) \cdot u'(x)$

Получаем:

$$\begin{aligned}
 y' &= (\sqrt[3]{(x-4)^5} \cdot \arcsin^2 x)' = (\sqrt[3]{(x-4)^5})' \cdot \arcsin^2 x + \sqrt[3]{(x-4)^5} \cdot (\arcsin^2 x)' = \\
 &= \frac{5}{3}(x-4)^{\frac{5}{3}-1} \cdot (x-4)' \cdot \arcsin^2 x + 2\sqrt[3]{(x-4)^5} \cdot \arcsin^{2-1} x \cdot (\arcsin x)' = \frac{5}{3}(x-4)^{\frac{2}{3}} \cdot \arcsin^2 x + \\
 &+ 2\sqrt[3]{(x-4)^5} \cdot \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{(x-4)^2} \cdot \arcsin^2 x + 2\sqrt[3]{(x-4)^5} \cdot \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}
 \end{aligned}$$

6.0 $y = \operatorname{th}^6 3x \cdot \operatorname{arctg}(3x+7)$

Применим формулу: производная произведения $(uv)' = u'v + uv'$, а также $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
 y' &= (\operatorname{th}^6 3x \cdot \operatorname{arctg}(3x+7))' = (\operatorname{th}^6 3x)' \cdot \operatorname{arctg}(3x+7) + \operatorname{th}^6 3x \cdot (\operatorname{arctg}(3x+7))' = \\
 &= 6\operatorname{th}^{6-1} 3x \cdot (\operatorname{th} 3x)' \cdot \operatorname{arctg}(3x+7) + \operatorname{th}^6 3x \cdot \frac{1}{1+(3x+7)^2} \cdot (3x+7)' = \\
 &= 6\operatorname{th}^5 3x \cdot \frac{3}{\operatorname{ch}^2 3x} \cdot \operatorname{arctg}(3x+7) + \operatorname{th}^6 3x \cdot \frac{3}{1+(3x+7)^2} = 18\operatorname{th}^5 3x \cdot \frac{\operatorname{arctg}(3x+7)}{\operatorname{ch}^2 3x} + \frac{3\operatorname{th}^6 3x}{1+(3x+7)^2}
 \end{aligned}$$

7.0 $y = \frac{e^{\sin x}}{3x^2 + 5x - 2}$

Применим формулу: производная частного $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, а также $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(e^x)' = e^x$,

$$(\sin x)' = \cos x$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\frac{e^{\sin x}}{3x^2 + 5x - 2} \right)' = \frac{(e^{\sin x})'(3x^2 + 5x - 2) - e^{\sin x} \cdot (3x^2 + 5x - 2)'}{(3x^2 + 5x - 2)^2} = \\
 &= \frac{e^{\sin x} \cdot (\sin x)' \cdot (3x^2 + 5x - 2) - e^{\sin x} \cdot (6x + 5)}{(3x^2 + 5x - 2)^2} = \frac{e^{\sin x} \cos x \cdot (3x^2 + 5x - 2) - e^{\sin x} \cdot (6x + 5)}{(3x^2 + 5x - 2)^2} = \\
 &= \frac{e^{\sin x} \cos x}{3x^2 + 5x - 2} - \frac{e^{\sin x} \cdot (6x + 5)}{(3x^2 + 5x - 2)^2}
 \end{aligned}$$

8.0 $y = \frac{\sin^3 5x}{\lg(3x^2 - 2x + 6)}$

Применим формулу: производная частного $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, а также $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} x'$, $(\sin x)' = \cos x$,

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Получаем:

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\frac{\sin^3 5x}{\lg(3x^2 - 2x + 6)} \right)' = \frac{(\sin^3 5x)' \cdot \lg(3x^2 - 2x + 6) - \sin^3 5x \cdot (\lg(3x^2 - 2x + 6))'}{\lg^2(3x^2 - 2x + 6)} = \\
 &= \frac{3 \sin^{3-1} 5x \cdot (\sin 5x)' \cdot \lg(3x^2 - 2x + 6) - \sin^3 5x \cdot \frac{1}{(3x^2 - 2x + 6) \ln 10} \cdot (3x^2 - 2x + 6)'}{\lg^2(3x^2 - 2x + 6)} = \\
 &= \frac{3 \sin^2 5x \cdot 5 \cos 5x \cdot \lg(3x^2 - 2x + 6) - \sin^3 5x \cdot \frac{6x - 2}{(3x^2 - 2x + 6) \ln 10}}{\lg^2(3x^2 - 2x + 6)} = \\
 &= \frac{15 \sin^2 5x \cos 5x}{\lg(3x^2 - 2x + 6)} - \frac{(6x - 2) \sin^3 5x}{(3x^2 - 2x + 6) \ln 10 \cdot \lg^2(3x^2 - 2x + 6)}
 \end{aligned}$$

9.0 $y = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ch} 2x}}{\operatorname{arctg}(3x + 7)}$

Применим формулу: производная частного $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, а также $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$,

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,

Получаем:

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\frac{\sqrt[3]{\operatorname{ch} 2x}}{\operatorname{arctg}(3x + 7)} \right)' = \frac{(\sqrt[3]{\operatorname{ch} 2x})' \operatorname{arctg}(3x + 7) - \sqrt[3]{\operatorname{ch} 2x} \cdot (\operatorname{arctg}(3x + 7))'}{\operatorname{arctg}^2(3x + 7)} = \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \operatorname{ch}^{\frac{1}{3}-1} 2x \cdot (\operatorname{ch} 2x)' \cdot \operatorname{arctg}(3x + 7) - \sqrt[3]{\operatorname{ch} 2x} \cdot \frac{1}{1+(3x+7)^2} \cdot (3x+7)'}{\operatorname{arctg}^2(3x + 7)} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{3} \operatorname{ch}^{\frac{2}{3}} 2x \cdot 2\operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{arctg}(3x+7) - \sqrt[3]{\operatorname{ch} 2x} \cdot \frac{3}{1+(3x+7)^2}}{\operatorname{arctg}^2(3x+7)} = \frac{\frac{2\operatorname{sh} 2x \cdot \operatorname{arctg}(3x+7)}{3\sqrt[3]{\operatorname{ch}^2 2x}} - \frac{3\sqrt[3]{\operatorname{ch} 2x}}{1+(3x+7)^2}}{\operatorname{arctg}^2(3x+7)} = \\
 &= \frac{2\operatorname{sh} 2x}{3\sqrt[3]{\operatorname{ch}^2 2x} \cdot \operatorname{arctg}(3x+7)} - \frac{3\sqrt[3]{\operatorname{ch} 2x}}{(1+(3x+7)^2) \cdot \operatorname{arctg}^2(3x+7)}
 \end{aligned}$$

10.0 $y = \frac{3\lg(8x-1)}{(x+6)^4}$

Применим формулу: производная частного $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, а также $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \cdot x'$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Получаем:

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\frac{3\lg(8x-1)}{(x+6)^4}\right)' = \frac{(3\lg(8x-1))' \cdot (x+6)^4 - 3\lg(8x-1) \cdot ((x+6)^4)'}{(x+6)^8} = \\
 &= \frac{\left(\frac{3}{(8x-1)\ln 10}\right) \cdot (8x-1)' \cdot (x+6)^4 - 4 \cdot 3\lg(8x-1) \cdot (x+6)^{4-1} \cdot (x+6)'}{(x+6)^8} = \\
 &= \frac{\left(\frac{3 \cdot 8}{(8x-1)\ln 10}\right) \cdot (x+6)^4 - 12\lg(8x-1) \cdot (x+6)^3}{(x+6)^8} = \frac{24}{(8x-1)\ln 10 \cdot (x+6)^4} - \frac{12\lg(8x-1)}{(x+6)^5}
 \end{aligned}$$

11.0 $y = \sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}} \cdot \arcsin 5x$

Применим формулу: производная произведения $(uv)' = u'v + uv'$, производная частного $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$,

а также $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Получаем:

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}} \cdot \arcsin 5x\right)' = \left(\sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}}\right)' \cdot \arcsin 5x + \sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}} \cdot (\arcsin 5x)' = \\
 &= \frac{1}{8} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^{\frac{1}{8}-1} \cdot \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)' \cdot \arcsin 5x + \sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} \cdot (5x)' = \\
 &= \frac{1}{8} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^{-\frac{7}{8}} \left(\frac{(2x+3)' \cdot (2x-3) - (2x+3) \cdot (2x-3)'}{(2x-3)^2}\right) \arcsin 5x + \sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}} \cdot \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[8]{\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^7}} \left(\frac{2 \cdot (2x-3) - 2(2x+3)}{(2x-3)^2} \right) \arcsin 5x + \sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}} \cdot \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[8]{\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^7}} \left(\frac{-12}{(2x-3)^2} \right) \arcsin 5x + \sqrt[8]{\frac{2x+3}{2x-3}} \cdot \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$$

12.0 $y = (\cos 5x)^{\ln 3x}$

Производная функции, заданной неявно

$$y = [u(x)]^{v(x)}$$

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

$$y' = y \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$$

Логарифмируя данную функцию, получаем

$$\ln y = \ln 3x \cdot \ln(\cos 5x)$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по x

$$(\ln y)' = (\ln 3x)' \cdot \ln(\cos 5x) + \ln 3x \cdot (\ln(\cos 5x))'$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3x} \cdot (3x)' \cdot \ln(\cos 5x) + \ln 3x \cdot \frac{1}{\cos 5x} \cdot (\cos 5x)'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{3x} \cdot \ln(\cos 5x) + \ln 3x \cdot \frac{1}{\cos 5x} \cdot (-5 \sin 5x)$$

Далее

$$y' = y \left(\frac{\ln(\cos 5x)}{x} - \frac{5 \sin 5x \cdot \ln 3x}{\cos 5x} \right)$$

Окончательно имеем

$$y' = (\cos 5x)^{\ln 3x} \left(\frac{\ln(\cos 5x)}{x} - \frac{5 \sin 5x \cdot \ln 3x}{\cos 5x} \right)$$

13.0 $y = (\cos(8x + 3))^{\lg 2x}$

Производная функции, заданной неявно

$$y = [u(x)]^{v(x)}$$

$$\ln y = v \ln u$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}$$

$$y' = y \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right)$$

Логарифмируя данную функцию, получаем

$$\ln y = \lg 2x \cdot \ln(\cos(8x + 3))$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по x

$$(\ln y)' = (\lg 2x)' \cdot \ln(\cos(8x + 3)) + \lg 2x \cdot (\ln(\cos(8x + 3)))'$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 2x} (2x)' \cdot \ln(\cos(8x + 3)) + \lg 2x \cdot \frac{1}{\cos(8x + 3)} (\cos(8x + 3))'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{\cos^2 2x} \cdot \ln(\cos(8x + 3)) - \lg 2x \cdot \frac{1}{\cos(8x + 3)} \sin(8x + 3) (8x + 3)'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{\cos^2 2x} \cdot \ln(\cos(8x + 3)) - \lg 2x \cdot \frac{8 \sin(8x + 3)}{\cos(8x + 3)}$$

Далее

$$y' = y \left(\frac{2 \ln(\cos(8x + 3))}{\cos^2 2x} - \frac{8 \lg 2x \cdot \sin(8x + 3)}{\cos(8x + 3)} \right)$$

Окончательно имеем

$$y' = (\cos(8x + 3))^{\lg 2x} \left(\frac{2 \ln(\cos(8x + 3))}{\cos^2 2x} - \frac{8 \lg 2x \cdot \sin(8x + 3)}{\cos(8x + 3)} \right)$$

14.0 $y = \frac{\sqrt[3]{(x + 7)^2}}{(x - 5)^2 \cdot (x - 2)^6}$

Применяя метод логарифмического дифференцирования, последовательно находим:

$$\ln y = \frac{2}{3} \ln(x + 7) - (2 \ln(x - 5) + 6 \ln(x - 2))$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{2}{3(x + 7)} \cdot (x + 7)' - \frac{2}{x - 5} \cdot (x - 5)' - \frac{6}{x - 2} \cdot (x - 2)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{2}{3(x + 7)} - \frac{2}{x - 5} - \frac{6}{x - 2}$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{2}{3(x + 7)} - \frac{2}{x - 5} - \frac{6}{x - 2} \right)$$

Окончательно получаем:

$$y' = \frac{\sqrt[3]{(x + 7)^2}}{(x - 5)^2 \cdot (x - 2)^6} \cdot \left(\frac{2}{3(x + 7)} - \frac{2}{x - 5} - \frac{6}{x - 2} \right)$$