

ИДЗ 6.2 – Вариант 0

1. Найти y' и y''

1.0 $y^2 = 15x^2 + 9$

Продифференцируем обе части по x :

$$2yy' = 30x$$

$$y' = \frac{30x}{2y} \Rightarrow y' = \frac{15x}{y}$$

Заметим, что производная неявной функции выражается через x и y , то есть получается равенство $y' = g(x, y)$ (1)

Для вычисления второй производной неявной функции, нужно продифференцировать обе части равенства (1) по x и затем подставить выражение $g(x, y)$ вместо y' .

$$y'' = \left(\frac{15x}{y} \right)' = \frac{15 \cdot y - 15x \cdot y'}{y^2} = \frac{15(y - x \cdot y')}{y^2}$$

Подставим $y' = \frac{30x}{2y}$ вместо y' , получим

$$y'' = \frac{15 \left(y - x \cdot \frac{15x}{y} \right)}{y^2} = \frac{15y - \frac{225x^2}{y}}{y^2} = \frac{15y^2 - 225x^2}{y^3}$$

2. Найти y' и y''

$$2.0 \quad \begin{cases} x = e^{-5t} \\ y = e^{-8t} \end{cases}$$

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями:

$$x = x(t), y = y(t), t \in (a;b).$$

Предположим, что функции $x(t)$, $y(t)$, имеют производные на $(a;b)$ и функция $x(t)$ имеет обратную функцию $t = g(x)$, которая также имеет производную в соответствующих точках x . Тогда определенную параметрическими уравнениями функцию y от x можно рассматривать как сложную функцию $y = y(t)$, $t = g(x)$, t – промежуточный аргумент. По правилу дифференцирования сложной функции получаем $y'_x =$

$y'_t t'_x = y'_t g'_x$. По теореме о дифференцировании обратной функции $y'_x = \frac{1}{x'_t}$. Учитывая это, получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$x'_t = (e^{-5t})' = -5e^{-5t}$$

$$y'_t = (e^{-8t})' = -8e^{-8t}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-8e^{-8t}}{-5e^{-5t}} = \frac{8e^{-8t}}{5e^{-5t}}$$

Вторая производная $y''_x = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}$

$$x''_t = (-5e^{-5t})' = 25e^{-5t}$$

$$y''_t = (-8e^{-8t})' = 64e^{-8t}$$

$$y''_x = \frac{64e^{-8t}(-5e^{-5t}) - 25e^{-5t} \cdot (-8e^{-8t})}{(-5e^{-5t})^3} = \frac{-320e^{-13t} + 200e^{-13t}}{-125e^{-15t}} = \frac{-120e^{-13t}}{-125e^{-15t}} = \frac{24}{25} e^{-13t - (-15t)} = \frac{24}{25} e^{2t}$$

3. Для данной функции y и аргумента x_0 вычислить $y'''(x_0)$

3.0 $y = x \cos 4x, x_0 = \pi$

Последовательно находим

$$y' = (x \cos 4x)' = \cos 4x - 4x \sin 4x$$

$$y'' = (\cos 4x - 4x \sin 4x)' = -4 \sin 4x - 4 \sin 4x - 16x \cos 4x = -8 \sin 4x - 16x \cos 4x$$

$$y''' = (-8 \sin 4x - 16x \cos 4x)' = -32 \cos 4x - 16 \cos 4x + 64x \sin 4x = -48 \cos 4x + 64x \sin 4x$$

Подставляем в функцию $y'''(x_0)$ значение аргумента x_0 , получим

$$y'''(\pi) = -48 \cos 4\pi + 64\pi \sin 4\pi = -48 \cdot 1 + 64\pi \cdot 0 = -48$$

4. Записать формулу для произвольной n -го порядка указанной функции.

4.0 $y = 9^x$

Дифференцируя последовательно n раз данную функцию, находим

$$y' = (9^x)' = 9^x \ln 9$$

$$y'' = (9^x \ln 9)' = 9^x \ln^2 9$$

$$y''' = (9^x \ln^2 9)' = 9^x \ln^3 9$$

Сравнив полученные выражения для y', y'' и y''' , запишем:

$$y^{(n)} = 9^x \ln^n 9$$

5. Решить следующие задачи.

5.0 Записать уравнение касательной к кривой $y = x^3 - 8x^2 + 2x - 13$ в точке с абсциссой $x=2$

Уравнение касательной:

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0)$$

Найдем y_0 и y'_0

Ордината точки касания

$$y_0 = 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 13 = 8 - 32 + 4 - 13 = -33$$

В любой точке

$$y' = (x^3 - 8x^2 + 2x - 13)' = 3x^2 - 16x + 2$$

В точке касания

$$y'_0 = 3 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + 2 = 12 - 32 + 2 = -18$$

Уравнение касательной будет иметь вид:

$$y + 33 = -18(x - 2)$$

$$y + 33 = -18x + 36$$

$$y = -18x + 3$$

Наш сайт: Fizmathim.ru

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

6. Решить следующие задачи.

6.0 В какой точке параболы $y^2 = 9x$ ордината возрастает втрое быстрее, чем абсцисса?

Решение:

Скорость возрастания ординаты

$$2yy' = 9 \Rightarrow y' = \frac{9}{2y}$$

Скорость возрастания ординаты в 3 раза больше скорости абсциссы

$$\frac{9}{2y} = 3$$

$$2y = 3$$

$$y = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{9} = \frac{9}{4 \cdot 9} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$