ИДЗ 6.3 – Вариант 0

1. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя:

1.0 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\operatorname{tg}x}{x^3+\sin x}$

Правило Лопиталя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

При $x\to 0$, имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\operatorname{tg}x}{x^3+\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\{\text{По правилу Лопиталя}\}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x+\operatorname{tg}x)'}{\left(x^3+\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{3x^2+\cos x}=\frac{3-\dfrac{1}{\cos^2 0}}{3\cdot 0^2+\cos 0}=$$

$$=\frac{3-1}{1}=2$$

2.0 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2-e^{x^2}}{\operatorname{tg}4x}$

Правило Лопиталя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

При $x\to 0$ имеем $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2-e^{x^2}}{\operatorname{tg}4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\{\text{По правилу Лопиталя}\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-x^2-e^{x^2}\right)'}{(\operatorname{tg}4x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x-2xe^{x^2}}{\dfrac{4}{\cos^2 4x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x-2xe^{x^2}\cdot\cos^2 4x}{4}=\frac{1}{4}\left(-2\cdot 0-2\cdot 0e^{0^2}\cdot\cos^2 4\cdot 0\right)=0$$

3.0 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n\left(2-e^{x}\right)}{\ell n\left(2-\sqrt{1+x}\right)}$

Правило Лопиталя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

При $x\to 0$ имеем $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ell n\left(2-e^{x}\right)}{\ell n\left(2-\sqrt{1+x}\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\{\text{По правилу Лопиталя}\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ell n\left(2-e^{x}\right)\right)'}{\left(\ell n\left(2-\sqrt{1+x}\right)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-e^{x}}{2-e^{x}}}{\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{2-\sqrt{1+x}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^{x}}{2-e^{x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}\cdot\left(2-\sqrt{1+x}\right)}}=\frac{\dfrac{e^{0}}{2-e^{0}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{1+0}\cdot\left(2-\sqrt{1+0}\right)}}=\frac{\dfrac{1}{2-1}}{\dfrac{1}{2\cdot 1\cdot(2-1)}}=\frac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{1}{2}}=2$$

4.0 $\lim\limits_{x\to 0}x^{tgx}$

Правило Лопиталя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

При $x\to 0$ имеем неопределенность вида 0^{0}.

Введем обозначение $y=x^{tgx}$

Тогда $\ell ny=tgx\cdot\ell nx$

$$\lim_{x\to 0}\ell ny=\lim_{x\to 0}tgx\cdot\ell nx=\lim_{x\to 0}\frac{\ell nx}{\dfrac{1}{tgx}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\{\text{По правилу Лопиталя}\}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ell nx)'}{\left(\dfrac{1}{tgx}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\dfrac{1}{\cos^{2}x}}{tg^{2}x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos^{2}x\cdot tg^{2}x}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos^{2}x\cdot\dfrac{\sin^{2}x}{\cos^{2}x}}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{2}x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\{\text{По правилу Лопиталя}\}=-\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin^{2}x\right)'}{(x)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1}=-\lim_{x\to 0}2\sin x\cos x=-2\sin 0\cdot\cos 0=0$$

Так как $\ell ny=\ell n\lim\limits_{x\to 0}x^{tgx}=0$

То $y=\lim\limits_{x\to 0}x^{tgx}=1$

5.0 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Правило Лопиталя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

При $x\to\infty$ имеем неопределенность вида ∞^0.

Введем обозначение $y=x^{\frac{1}{x}}$

Тогда $\ln y=\frac{1}{x}\cdot\ln(x)$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(x)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\{\text{По правилу Лопиталя}\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(x))'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Так как $\ln y=\ln\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=0$

То $y=\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$

2. С помощью дифференциала приближенно вычислить данные величины и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой)

6.0 $(8{,}02)^4$

Введем в рассмотрение функцию $y=x^4$ где $x=x_0+\Delta x$

$x_0=8 \qquad \Delta x=0{,}02$

Воспользуемся формулой $y(x_0+\Delta x)\approx y(x_0)+y'(x_0)\Delta x$

Получим:

$y(x_0)=8^4=4096$

$y'=\left(x^4\right)'=4x^{4-1}=4x^3$

$y'(8)=4\cdot8^3=4\cdot512=2048$

Вычисляем

$(8{,}02)^4=4096+2048\cdot0{,}02=4096+40{,}96=4136{,}96$

Относительная погрешность определяется по формуле

$$\delta=\left|\frac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|$$

Точное значение $(8{,}02)^4=4137{,}1138$

где $\Delta=|\Delta y-dy|=|4136{,}96-4137{,}1138|=0{,}1538$

$\delta=\left|\frac{0{,}1538}{4136{,}96}\right|\cdot100\%\approx0{,}0037\%$

7.0 $\sin 49^0$

Введем в рассмотрение функцию $y = \sin x$ где $x = x_0 + \Delta x$

$$x_0 = 45^0 \qquad \Delta x = 4^0 = \frac{4\pi}{180} = \frac{\pi}{45}$$

Воспользуемся формулой $y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$

Получим:

$$y(x_0) = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

$$y' = (\sin x)' = \cos x$$

$$y'(45^0) = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

Вычисляем

$$\sin 49^0 = 0{,}707 + 0{,}707 \cdot \frac{\pi}{45} = 0{,}707 + 0{,}707 \cdot \frac{3{,}14}{45} = 0{,}707 + 0{,}0493 = 0{,}7563$$

Относительная погрешность определяется по формуле

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$$

Точное значение $\sin 49^0 = 0{,}7547$

где $\Delta = |\Delta y - dy| = |0{,}7563 - 0{,}7547| = 0{,}0016$

$$\delta = \left|\frac{0{,}0016}{0{,}7563}\right| \cdot 100\% \approx 0{,}21\%$$