

### ИДЗ 6.4 – Вариант 0

1. Решить следующие задачи

1.0 Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в эллипс

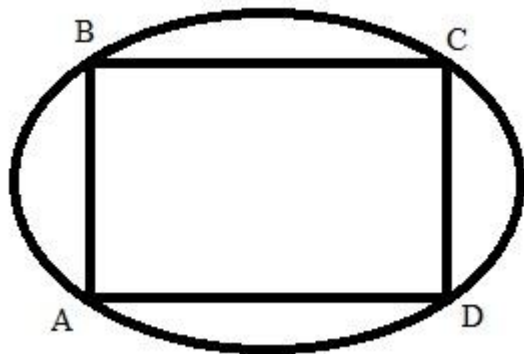
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

**Решение:**

пусть  $(x'; y')$  координаты вершины А, прямоугольника ABCD.

Если прямоугольник вписан в эллипс, то выполняется условие

$$\begin{aligned} \frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{9} &= 1 \\ 9x'^2 + 25y'^2 &= 25 \cdot 9 \\ y'^2 &= \frac{225 - 9x'^2}{25} \end{aligned}$$



Тогда площадь прямоугольника равна  $S = 2x' \cdot y' = 4x'y'$  это не производные

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$S = 4xy$$

Тогда

$$y^2 = \frac{225 - 9x^2}{25}$$

$$S = 4\sqrt{\frac{225 - 9x^2}{25}} \cdot x$$

Теперь рассмотрим данную функцию очевидно что  $a > b > y > x > 0$ .

Найдем производную

$$S' = \left( 4\sqrt{\frac{225 - 9x^2}{25}} \cdot x \right)' = 4\sqrt{9 - \frac{9x^2}{25}} + \frac{4 \cdot \frac{18x}{25} \cdot x}{2\sqrt{9 - \frac{9x^2}{25}}} = 4\sqrt{9 - \frac{9x^2}{25}} - \frac{36x^2}{25\sqrt{9 - \frac{9x^2}{25}}} =$$

$$= \frac{100\left(9 - \frac{9x^2}{25}\right) + 36x^2}{25\sqrt{9 - \frac{9x^2}{25}}} = \frac{900 - 36x^2 - 36x^2}{25\sqrt{9 - \frac{9x^2}{25}}} = \frac{900 - 72x^2}{25\sqrt{9 - \frac{9x^2}{25}}}$$

$$S' = 0$$

$$900 - 72x^2 = 0$$

$$72x^2 = 900 \Rightarrow 8x^2 = 100$$

$$x = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$225 \geq 9x^2 \Rightarrow 25 \geq x^2 \Rightarrow 5 \neq x$$

То есть одна сторона прямоугольника равна  $2 \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$  тогда другая  $3\sqrt{2}$ .

То есть самая наибольшая площадь которую можно вписать в данный эллипс равен

$$S = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$$

2. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

$$2.0 \quad y = \frac{x^2}{x-1}$$

1. Область определения функции

$(x-1) \neq 0$  в знаменателе.

$$x \neq 1$$

$$D(x) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$$

2. Исследовать функцию на непрерывность

Данная функция определена на  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$  и, следовательно, непрерывна на этих интервалах. В точке  $x=1$  функция имеет разрыв второго рода, поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \frac{x^2}{x-1} \right) = -\frac{1}{0} = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \left( \frac{x^2}{x-1} \right) = \frac{1}{0} = \infty$$

3. Четность, нечетность.

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)-1} = \frac{x^2}{-x-1} \quad \text{функция ни четная, ни нечетная.}$$

4. Найти интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума

$$y' = \left( \frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0; \quad x = 2$$

Исследуем точки  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 2$  на возможный экстремум

Находим промежутки возрастания, убывания, подставляя значения соответствующие интервалам в полученную функцию  $y'$ . Исследуем интервалы

В интервале  $(-\infty; 0)$   $y' > 0$  - функция возрастает на этом интервале,  $(0; 1)$   $y' < 0$  - функция убывает на этом интервале,  $(1; 2)$   $y' < 0$  - функция убывает на этом интервале,  $(2; +\infty)$   $y' > 0$  - функция возрастает на этом интервале.

$y(0) = 0$  - экстремум в точке  $(0; 0)$  имеет локальный максимум

$y(2) = 4$  - экстремум в точке  $(2; 4)$  имеет локальный минимум





5. Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и определим точки перегиба.

$$y'' = \left( \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x^2-2x)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3} =$$
$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$y'' = 0$$

$$\frac{2}{(x-1)^3} \neq 0$$

Точек перегиба нет.

X	$-\infty; 0$	0	0; 1	1	1; 2	2	$2; +\infty$
$y''$	-	0	-		+		+
y				т.п.			

6. Вертикальные, наклонные асимптоты.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left( \frac{x^2}{x-1} \right) = -\frac{1}{0} = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \left( \frac{x^2}{x-1} \right) = \frac{1}{0} = \infty \quad - \text{вертикальная асимптота существует } x=1$$

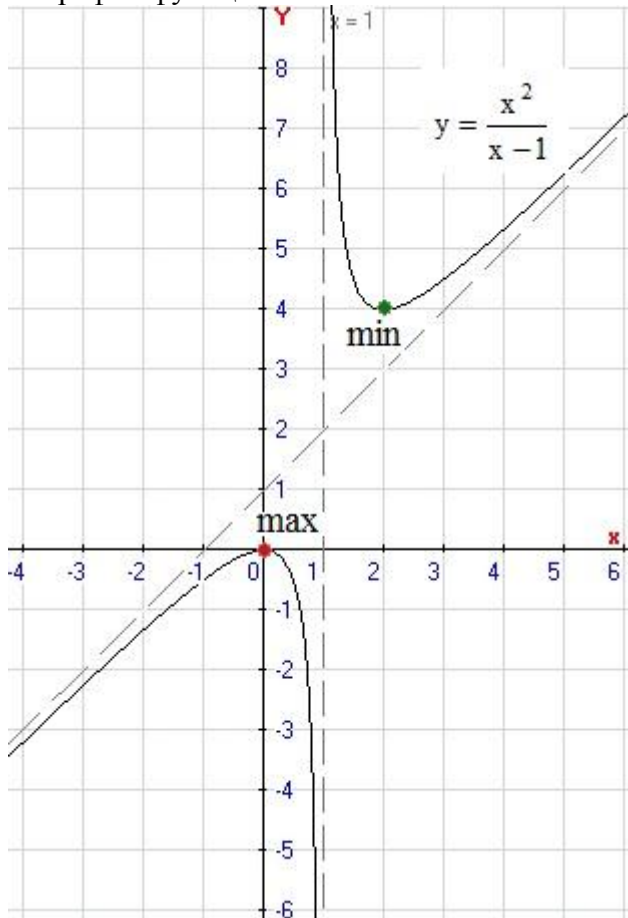
Находим наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2}{x(x-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 + \frac{1}{x-1} \right) = 1$$

$y = x + 1$  - наклонная асимптота

7. График функции



Наш сайт: [Fizmathim.ru](http://Fizmathim.ru)

Группа ВКонтакте [https://vk.com/fizmathim\\_reshe](https://vk.com/fizmathim_reshe)

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

3. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

3.0  $y = x - \ln x$

1. Область определения функции

Учитываем, что выражение, стоящее под знаком логарифма всегда положительно.  $x > 0$

$$D(x) = (0; +\infty)$$

2. Четность, нечетность.

Так как область определения функции – только положительные значения  $x$ , то о четности и нечетности говорить нельзя.

3. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:

С ОУ - нет точек пересечения, т.к.  $x \neq 0$

С ОХ:  $y = 0 \quad x - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = x$  нет значений, так как  $x > \ln x$

4. Вертикальные, наклонные асимптоты.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x - \ln x) = +\infty - \text{вертикальная асимптота } x = 0$$

Находим наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x - \ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{(x - \ln x)'}{(x)'} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) = 1 - \frac{1}{0} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - \ln x) - x \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln x = \infty$$

Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

5. Исследовать функцию на возрастание, убывание, локальный экстремум.

$$y' = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$y' = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1;$$

Находим промежутки возрастания, убывания, подставляя значения соответствующие интервалам в полученную функцию  $y'$ . Исследуем интервалы

Рассматриваем точку  $x = 1$ , так как она входит в область допустимых значений  $D(x) = (0; +\infty)$

В интервале  $(0; 1)$ ,  $y' < 0$  - функция убывает на этом интервале,  $(1; +\infty)$

$y' > 0$  - функция возрастает на этом интервале,

$y(1) = 1$  - экстремум в точке  $(1; 1)$  имеет локальный минимум



6. Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и определим точки перегиба.

$$y'' = \left( 1 - \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x^2}$$

$$y'' = 0$$

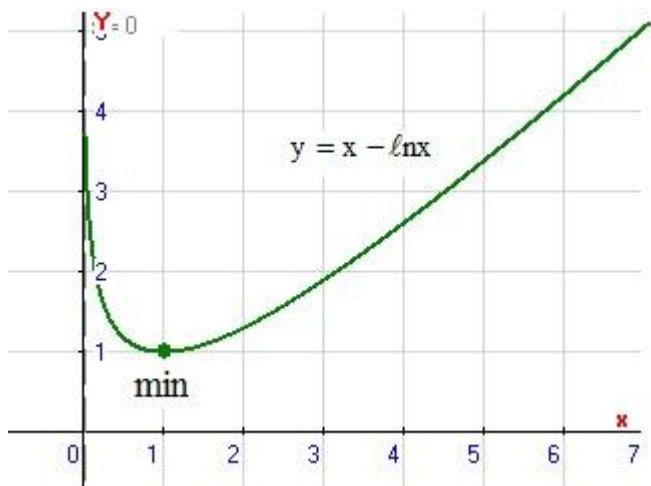
$$1 \neq 0$$

Точек перегиба

x	0; 1	1	$1 + \infty$
$y''$	+		+
y			

В интервале (0; 1) и (1;  $+\infty$ ),  $y'' > 0$  кривая вогнута

### 7. График функции



4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $y=f(x)$  на отрезке  $[a; b]$

4.0  $f(x) = x^3 - 3x + 1$   $[1/2, 2]$

Найдем критические точки на данном отрезке

$$f'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^{3-1} - 3 = 3x^2 - 3$$

Решим уравнение

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Точка  $x = -1$  не принадлежит данному интервалу  $[1/2, 2]$ . Рассмотрим точку  $x = 1$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

Найдем значения функции на концах интервала  $x = 1/2$  и  $x = 2$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{8}$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$$

В итоге:

Наибольшего значения функция принимает на отрезке  $[1/2, 2]$  в точке  $x = 2$  и имеет значение

$$f_{\text{наиб}} = f(2) = 3,$$

а наименьшее значение в точке  $x = 1$ ,  $f_{\text{наим}} = f(1) = -1$