ИДЗ 6.4 – Вариант 0

1. Решить следующие задачи

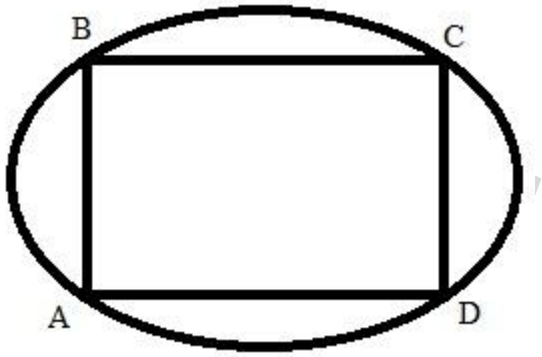
1.0 Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в эллипс

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

Решение:

пусть $(x';\,y')$ координаты вершины A, прямоугольника ABCD.

Если прямоугольник вписан в эллипс, то выполняется условие



$$\frac{x'^2}{25}+\frac{y'^2}{9}=1$$

$$9x'^2+25y'^2=25\cdot 9$$

$$y'^2=\frac{225-9x'^2}{25}$$

Тогда площадь прямоугольника равна $S=2x'\cdot y'=4x'y'$ это не производные

$$x'=x$$

$$y'=y$$

$$S=4xy$$

Тогда $\quad y^2=\dfrac{225-9x^2}{25}$

$$S=4\sqrt{\frac{225-9x^2}{25}}\cdot x$$

Теперь рассмотрим данную функцию очевидно что $a>b>y>x>0$.

Найдем производную

$$S'=\left(4\sqrt{\frac{225-9x^2}{25}}\cdot x\right)'=4\sqrt{9-\frac{9x^2}{25}}+\frac{4\cdot\frac{18x}{25}\cdot x}{2\sqrt{9-\frac{9x^2}{25}}}=4\sqrt{9-\frac{9x^2}{25}}-\frac{36x^2}{25\sqrt{9-\frac{9x^2}{25}}}=$$

$$=\frac{100\left(9-\frac{9x^2}{25}\right)+36x^2}{25\sqrt{9-\frac{9x^2}{25}}}=\frac{900-36x^2-36x^2}{25\sqrt{9-\frac{9x^2}{25}}}=\frac{900-72x^2}{25\sqrt{9-\frac{9x^2}{25}}}$$

$$S'=0$$

$$900-72x^2=0$$

$$72x^2=900\Rightarrow 8x^2=100$$

$$x=\frac{5}{\sqrt2}$$

$$225\ge 9x^2\Rightarrow 25\ge x^2\Rightarrow 5\ne x$$

То есть одна сторона прямоугольника равна $2\cdot\dfrac{5}{\sqrt2}=5\sqrt2$ тогда другая $3\sqrt2$.

То есть самая наибольшая площадь которую можно вписать в данный эллипс равен
$S=2\cdot5\cdot3=30$

2. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

2.0 $y = \dfrac{x^2}{x-1}$

1. Область определения функции

$(x-1) \neq 0$ в знаменателе.

$x \neq 1$

$D(x) = (-\infty;\ 1) \cap (1;\ +\infty)$

2. Исследовать функцию на непрерывность

Данная функция определена на $(-\infty;\ 1) \cap (1;\ +\infty)$ и, следовательно, непрерывна на этих интервалах. В точке x=1 функция имеет разрыв второго рода, поскольку

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = -\frac{1}{0} = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 1+0}\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = \frac{1}{0} = \infty$$

3. Четность, нечетность.

$y(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)-1} = \dfrac{x^2}{-x-1}$ функция ни четная, ни нечетная.

4. Найти интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$y' = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0;\ x = 2$

Исследуем точки $x_1 = 0;\ x_2 = 2$ на возможный экстремум

Находим промежутки возрастания, убывания, подставляя значения соответствующие интервалам в полученную функцию y'. Исследуем интервалы

В интервале $(-\infty;\ 0)$ $y' > 0$ - функция возрастает на этом интервале, $(0;\ 1)$ $y' < 0$ - функция убывает на этом интервале, $(1;\ 2)$ $y' < 0$ - функция убывает на этом интервале, $(2;\ +\infty)$ $y' > 0$ - функция возрастает на этом интервале.

$y(0) = 0$ - экстремум в точке $(0;\ 0)$ имеет локальный максимум

$y(2) = 4$ - экстремум в точке $(2;\ 4)$ имеет локальный минимум

5. Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и определим точки перегиба.

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x^2-2x)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$y'' = 0$

$\dfrac{2}{(x-1)^3} \neq 0$

Точек перегиба нет.

X	$-\infty; 0$	0	0; 1	1	1; 2	2	$2; +\infty$
y''	-	0	-		+		+
y	∩		∩	т.р.	∪		∪

6. Вертикальные, наклонные асимптоты.

$\lim\limits_{x\to 1-0}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)=-\frac{1}{0}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\frac{x^2}{x-1}\right)=\frac{1}{0}=\infty$ - вертикальная асимптота существует x=1

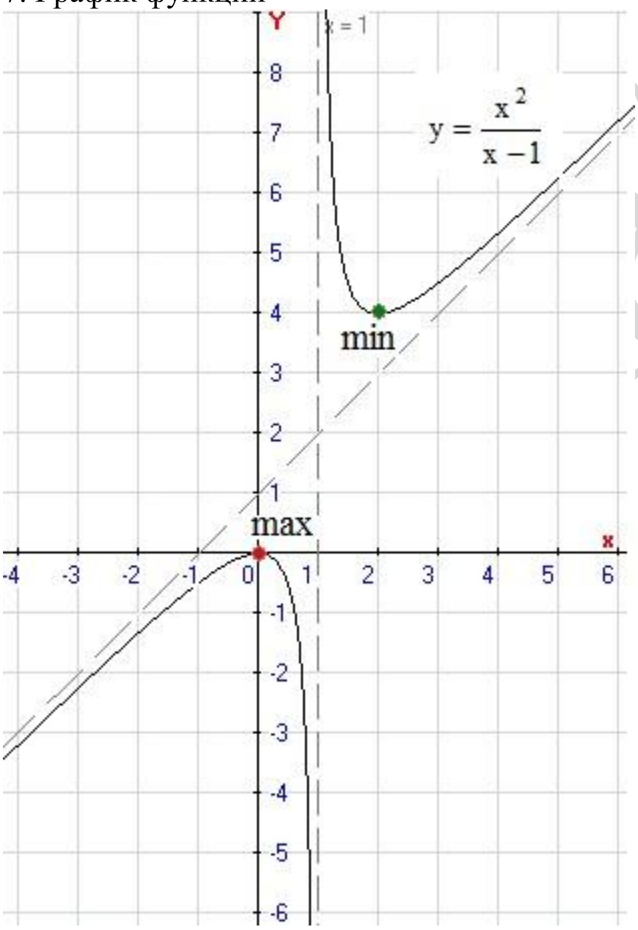
Находим наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x(x-1)}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-1}-x=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1$$

$y=x+1$ - наклонная асимптота

7. График функции



3. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

3.0 $y = x - \ln x$
1. Область определения функции
Учитываем, что выражение, стоящее под знаком логарифма всегда положительно. $x > 0$
$D(x) = (0;\ +\infty)$

2. Четность, нечетность.
Так как область определения функции – только положительные значения x, то о четности и нечетности говорить нельзя.

3. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:
С OY - нет точек пересечения, т.к. $x \neq 0$
С OX: y = 0 $x - \ell nx = 0 \Rightarrow \ell nx = x$ нет значений, так как $x > \ell nx$

4. Вертикальные, наклонные асимптоты.
$\lim\limits_{x\to 0}(x - \ell nx) = +\infty$ - вертикальная асимптота x = 0

Находим наклонные асимптоты:
$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-\ell nx}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-\ell nx)'}{(x)'}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{1}{0} = 1$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}(x-\ell nx)-x\cdot 1 = \lim_{x\to\pm\infty}\ell nx = \infty$$
Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

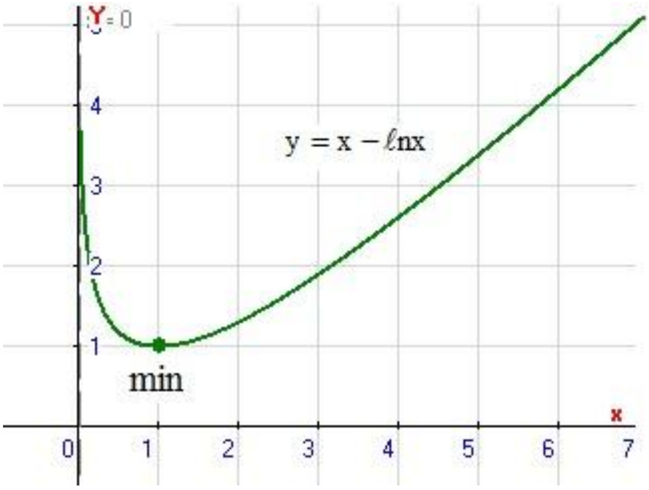
5. Исследовать функцию на возрастание, убывание, локальный экстремум.
$$y' = (x-\ell nx)' = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$
$y' = 0$
$x - 1 = 0$
$x = 1;$
Находим промежутки возрастания, убывания, подставляя значения соответствующие интервалам в полученную функцию y'. Исследуем интервалы
Рассматриваем точку $x = 1$, так как она входит в область допустимых значений $D(x) = (0;\ +\infty)$
В интервале $(0;\ 1)$, $y' < 0$ - функция убывает на этом интервале, $(1;\ +\infty)$
$y' > 0$ - функция возрастает на этом интервале,
$y(1) = 1$ - экстремум в точке $(1;\ 1)$ имеет локальный минимум

6. Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и определим точки перегиба.
$$y'' = \left(1-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$$
$y'' = 0$
$1 \neq 0$
Точек перегиба

x	0; 1	1	$1+\infty$
y''	+		+
y	$\smile$		$\smile$

В интервале $(0;\ 1)$ и $(1;\ +\infty)$, $y''>0$ кривая вогнута

7. График функции



4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции y=f(x) на отрезке [a; b]

4.0 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ [1/2, 2]

Найдем критические точки на данном отрезке
$$f'(x)=\left(x^3-3x+1\right)'=3x^{3-1}-3=3x^2-3$$
Решим уравнение
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x^2=1$$
$$x_{1,2}=\pm 1$$
Точка $x=-1$ не принадлежит данному интервалу [1/2, 2]. Рассмотрим точку $x = 1$
$$f(1)=1^3-3\cdot 1+1=1-3+1=-1$$
Найдем значения функции на концах интервала x = 1/2 и x = 2
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\frac{1}{2}+1=\frac{1}{8}-\frac{3}{2}+1=-\frac{3}{8}$$
$$f(2)=2^3-3\cdot 2+1=8-6+1=3$$
В итоге:
Наибольшего значения функция принимает на отрезке [1/2, 2] в точке x = 2 и имеет значение $f_{наиб}=f(2)=3$,
а наименьшее значение в точке x = 1, $f_{наим}=f(1)=-1$