ИДЗ 8.1 – Вариант 0

Найти неопределенные интегралы (в заданиях 1-5 результаты интегрирования проверить дифференцированием).

1.0 $\int \frac{4x^5 - \sqrt{x^4} + 8}{x^3} dx$

Применим формулу: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$,

Получаем:

$$\int \frac{4x^5 - \sqrt{x^4} + 8}{x^3} dx = \int \frac{4x^5}{x^3} dx - \int \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} dx + \int \frac{8}{x^3} dx = 4\int x^2 dx - \int x^{\frac{4}{2}-3} dx + 8\int \frac{1}{x^3} dx =$$

$$= 4\int x^2 dx - \int \frac{dx}{x} + 8\int x^{-3} dx = 4\frac{x^{2+1}}{2+1} - \ell n x + 8\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{4x^3}{3} - \ell n x + 8\frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{4x^3}{3} - \ell n x - \frac{4}{x^2} + C$$

Проверим полученный результат

$$\left(\frac{4x^3}{3} - \ell n x - \frac{4}{x^2} + C\right)' = \frac{4}{3} \cdot 3x^{3-1} - \frac{1}{x} - 4\cdot(-2)x^{-2-1} = 4x^2 - \frac{1}{x} + 8x^{-3} = 4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{8}{x^3}$$

2.0 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+x)^4}}$

Применима формула: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+x)^4}} = \int (3+x)^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{(3+x)^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C = \frac{(3+x)^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + C = \frac{-3}{\sqrt[3]{3+x}} + C$$

Проверим полученный результат

$$\left(\frac{-3}{\sqrt[3]{3+x}} + C\right)' = -3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(3+x)^{-\frac{1}{3}-1} = (3+x)^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3+x)^4}}$$

3.0 $\int \frac{dx}{7+9x}$

Применима формула: $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

$$\int \frac{dx}{7+9x} = \frac{1}{9}\ell n|7+9x| + C$$

Проверим полученный результат

$$\left(\frac{1}{9}\ell n|7+9x| + C\right)' = \frac{1}{9(7+9x)} \cdot (7+9x)' = \frac{9}{9(7+9x)} = \frac{1}{7+9x}$$

4.0 $\int \cos(9x+7)dx$

$$\int \cos(9x+7)dx = \frac{1}{9}\sin(9x+7)+C$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{9}\sin(9x+7)+C\right)' = \frac{1}{9}\cdot\cos(9x+7)\cdot(9x+7)' = \frac{1}{9}\cdot(9\cos(9x+7)) = \cos(9x+7)$$

5.0 $\int \frac{3dx}{4x^2-16}$

Применима формула: $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+C$

Получаем:

$$\int \frac{3dx}{4x^2-16} = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{3}{2\cdot 4\cdot 2}\ell n\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+C = \frac{3}{16}\ell n\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+C$$

Проверка:

$$\left(\frac{3}{16}\ell n\left(\frac{x-2}{x+2}\right)+C\right)' = \left(\frac{3}{16}\ell n(x-2)-\frac{3}{16}\ell n(x+2)\right)' = \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{x+2} = \frac{3}{16}\cdot\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right) =$$

$$= \frac{3}{16}\cdot\left(\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}\right) = \frac{3}{16}\cdot\left(\frac{4}{x^2-4}\right) = \frac{3}{4x^2-16}$$

6.0 $\int \frac{8xdx}{\sqrt{2x^2+9}}$

Преобразуем подынтегральную функцию таким образом, чтобы в числителе получилась производная знаменателя:

Также применима формула: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

Получаем:

$$\int \frac{8xdx}{\sqrt{2x^2+9}} = 8\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+9}} = \frac{8}{4}\int \frac{4xdx}{\sqrt{2x^2+9}} = \frac{2(2x^2+9)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C = \frac{2(2x^2+9)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C = 4\sqrt{2x^2+9}+C$$

7.0 $\int \frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}}$

Применима формула: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$

Получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(4)^2-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{4}+C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{2}+C$$

8.0 $\int e^{9-13x}dx$

Также применима формула: $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

Получаем:

$$\int e^{9-13x}dx = -\frac{1}{13}\int e^{9-13x}d(9-13x) = -\frac{1}{13}e^{9-13x} + C$$

9.0 $\int \frac{dx}{(x-9)\ln^{6}(x-9)}$

Также применима формула: $\int x^{n}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Получаем:

$$\int \frac{dx}{(x-9)\ln^{6}(x-9)} = \int \ln^{-6}(x-9)d(\ln(x-9)) = \frac{\ln^{-6+1}(x-9)}{-6+1} + C = \frac{\ln^{-5}(x-9)}{-5} + C = \frac{1}{-5\ln^{5}(x-9)} + C$$

10.0 $\int \sin^{6}2x\cos 2xdx$

Также применима формула: $\int x^{n}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Получаем:

$$\int \sin^{6}2x\cos 2dx = \frac{1}{2}\int \sin^{6}2xd(\sin 2x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^{6+1}2x}{6+1} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^{7}2x}{7} + C = \frac{\sin^{7}2x}{14} + C$$

11.0 $\int \frac{dx}{\sin^{2}2x\cdot ctg^{2}2x}$

Также применима формула: $\int x^{n}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Получаем:

$$\int \frac{dx}{\sin^{2}2x\cdot ctg^{2}2x} = -\frac{1}{2}\int ctg^{-2}2x\left(-\frac{2dx}{\sin^{2}2x}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{ctg^{-2+1}2x}{-2+1} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{ctg^{-1}2x}{-1} + C = \frac{1}{2ctg2x} + C$$

12.0 $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^5 4x}}{1+16x^2}dx$

Также применима формула: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Получаем:

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^5 4x}}{1+16x^2}dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{arctg}^{\frac{5}{2}} 4x d\left(\frac{4}{1+16x^2}\right) = \frac{1}{4}\int \operatorname{arctg}^{\frac{5}{2}} 4x d(\operatorname{arctg} 4x) = \frac{1}{4}\frac{\operatorname{arctg}^{\frac{5}{2}+1} 4x}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{1}{4}\frac{\operatorname{arctg}^{\frac{7}{2}} 4x}{\frac{7}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{14}\sqrt{\operatorname{arctg}^7 4x} + C$$

13.0 $\int e^{5\cos x+7}\sin x dx$

Также применима формула: $\int e^x dx = e^x + C$

Получаем:

$$\int e^{5\cos x+7}\sin x dx = -\frac{1}{5}\int e^{5\cos x+7} d(5\cos x + 7) = -\frac{1}{5}e^{5\cos x+7} + C$$

14.0 $\int \frac{4x+7}{3x^2-9}dx$

Представим интеграл в следующем виде

$$\int \frac{4x+7}{3x^2-9}dx = \int \frac{4x}{3x^2-9}dx + \int \frac{7}{3x^2-9}dx$$

Первый интеграл:

$$\int \frac{4x}{3x^2-9}dx = \left| \begin{matrix} 3x^2-9=t \\ dt = 6xdx \end{matrix} \right| = \frac{4}{6}\int \frac{1}{t}dt = \frac{2}{3}\ell n t + C = \frac{2}{3}\ell n\left|3x^2-9\right| + C$$

Второй интеграл, табличный

Применима формула: $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$

$$\int \frac{7}{3x^2-9}dx = \int \frac{7}{\sqrt{\left(\sqrt{3}x\right)^2 - (3)^2}}dx = \frac{7}{2\cdot 3\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-3}{\sqrt{3}x+3}\right| + C = \frac{7}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-3}{\sqrt{3}x+3}\right| + C$$

Тогда общее решение интеграла:

$$\int \frac{4x+7}{3x^2-9}dx = \frac{2}{3}\ell n\left|3x^2-9\right| + \frac{7}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-3}{\sqrt{3}x+3}\right| + C$$