ИДЗ 8.2 – Вариант 0

Найти неопределенные интегралы.

1.0 $\int \frac{2x+3}{5x^2+4}dx$

Представим интеграл в следующем виде

$$\int \frac{2x+3}{5x^2+4}dx = \int \frac{2x}{5x^2+4}dx + \int \frac{3}{5x^2+4}dx$$

Первый интеграл

$$\int \frac{2x}{5x^2+4}dx = \begin{vmatrix} 5x^2+4=t \\ dt=10xdx \end{vmatrix} = \frac{2}{10}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ell nt + C = \frac{1}{5}\ell n\left|5x^2+4\right| + C$$

Второй интеграл, табличный:

Применима формула: $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

$$\int \frac{3}{5x^2+4}dx = 3\int \frac{dx}{\left(\sqrt{5}x\right)^2+2^2}dx = \frac{3}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{2} + C$$

Тогда общее решение интеграла:

$$\int \frac{2x+3}{5x^2+4}dx = \frac{1}{5}\ell n\left|5x^2+4\right| + \frac{3}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{2} + C$$

2.0 $\int \frac{e^{4x}}{e^{4x}+9}dx$

Сделаем замену $e^{4x}+9=t$, отсюда $dt = 4e^{4x}dx$, $dx = \frac{1}{4e^{4x}}dt$

Также применима формула: $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

Получаем:

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{4x}+9}dx = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln t + C$$

Возвратившись к старой переменной, имеем

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{4x}+9}dx = \frac{1}{4}\ln\left|e^{4x}+9\right| + C$$

3.0 $\int \frac{x^5-2x}{x^2+1}dx$

Разделив числитель подынтегральной функции на знаменатель, выделим целую часть неправильной дроби, стоящей под знаком интеграла. Получим интеграл от алгебраической суммы:

$$\begin{array}{r|l} x^5-2x & x^2+1 \\ \underline{-\;x^5+x^3} & x^3-x \\ -x^3-2x & \\ \underline{-\;-x^3-x} & \\ -x & \end{array}$$

Тогда запишем

$$\int \frac{x^5-2x}{x^2+1}dx = \int\left(x^3-x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

Представим интеграл в следующем виде

$$\int \frac{x^5-2x}{x^2+1}dx = \int x^3dx - \int xdx - \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

Первый интеграл

$$\int x^3dx = \frac{x^{3+1}}{3+1}+C = \frac{x^4}{4}+C$$

Второй интеграл, табличный:

$$\int xdx = \frac{x^{1+1}}{1+1}+C = \frac{x^2}{2}+C$$

Третий интеграл

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \begin{vmatrix} x^2+1=t \\ dt=2xdx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ell nt + C = \frac{1}{2}\ell n\left|x^2+1\right|+C$$

Тогда общее решение интеграла:

$$\int \frac{x^5-2x}{x^2+1}dx = \frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ell n\left|x^2+1\right|+C$$

4.0 $\int \cos^3(3x+5)dx$

$$\int \cos^3(3x+5)dx = \int \cos^2(3x+5)\cdot\cos(3x+5)dx =$$

Используя тригонометрическое тождество

$$\cos^2(3x+5) = 1-\sin^2(3x+5)$$

Получаем:

$$\int \cos^3(3x+5)dx = \int\left(1-\sin^2(3x+5)\right)\cos(3x+5)dx$$

Сделаем замену $\sin(3x+5)=t$, отсюда $dt = 3\cos(3x+5)dx$, $dx = \frac{1}{3\cos(3x+5)}dt$

Получаем:

$$\int \cos^3(3x+5)dx = \int\left(1-\sin^2(3x+5)\right)\cos(3x+5)dx = \frac{1}{3}\int\left(1-t^2\right)dt = \frac{1}{3}\left(t-\frac{t^{2+1}}{2+1}\right)+C = \frac{1}{3}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C = \frac{1}{3}t-\frac{t^3}{9}+C$$

Возвратившись к старой переменной, имеем

$$\int \cos^3(3x+5)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+5)-\frac{\sin^3(3x+5)}{9}+C$$

5.0 $\int \operatorname{ctg}^3 4x dx$

Так как согласно тригонометрическому тождеству

$$\operatorname{ctg}^2 4x = \frac{1}{\sin^2 4x} - 1; \quad \operatorname{ctg} 4x = \frac{\cos 4x}{\sin 4x}$$

Получаем:

$$\int \operatorname{ctg}^2 4x dx = \int \operatorname{ctg} 4x \left(\frac{1}{\sin^2 4x} - 1 \right) dx = \int \frac{\operatorname{ctg} 4x}{\sin^2 4x} dx - \int \operatorname{ctg} 4x dx = \int \frac{\operatorname{ctg} 4x}{\sin^2 4x} dx - \int \frac{\cos 4x}{\sin 4x} dx$$

Первый интеграл

$$\int \frac{\operatorname{ctg} 4x}{\sin^2 4x} dx = \left| \begin{matrix} \operatorname{ctg} 4x = t \\ dt = -\dfrac{4}{\sin^2 4x} dx \end{matrix} \right| = -\frac{1}{4} \int t dt = -\frac{1}{4} \cdot \frac{t^{1+1}}{1+1} + C = -\frac{t^2}{8} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2 4x}{8} + C$$

Второй интеграл

$$\int \frac{\cos 4x}{\sin 4x} dx = \left| \begin{matrix} \sin 4x = t \\ dt = 4\cos 4x dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ell n t + C = \frac{1}{4} \ell n |\sin 4x| + C$$

В итоге, решение интеграла:

$$\int \operatorname{ctg}^3 4x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^2 4x}{8} - \frac{1}{4} \ell n |\sin 4x| + C$$

6.0 $\int \sin 9x \cos 6x dx$

Используя тригонометрическое тождество

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

применима формула: $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Получаем:

$$\int \sin 9x \cos 6x dx = \int \frac{1}{2} (\sin(9-6)x + \sin(9+6)x) dx = \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin 15x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 3x dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \sin 15x dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{15} \right) \cos 15x + C = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{30} \cos 15x + C$$

7.0 $\int \frac{dx}{3x^2 - 24x + 51}$

Вынесем 3 за скобку

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 24x + 42} = \int \frac{dx}{3(x^2 - 8x + 17)}$$

Разложим знаменатель интеграла в квадрат разности: $x^2 - 8x + 17 = x^2 - 2 \cdot 4x + 17 + 16 - 16 = (x-4)^2 + 1$

Табличная формула интегрирования $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C$

Подставляем, получаем:

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 24x + 42} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-4)^2 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-4)^2 + 1^2} = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x-4}{1} \right) + C = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}(x-4) + C$$

8.0 $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$

Разложим знаменатель интеграла в квадрат суммы: $3-4x-x^2=-(x^2+4x+4)+4+3=7-(x+2)^2$

Табличная формула интегрирования $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$

Подставляем, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{7-(x+2)^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2-(x+2)^2}}=\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{7}}+C$$

9.0 $\int \frac{2x+7}{x^2+4x+6}dx$

Разложим знаменатель интеграла в квадрат суммы: $x^2+4x+6=x^2+4x+6+4-4=(x+2)^2+2$

Применима формула: Табличная формула интегрирования $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

Получаем:

$$\int \frac{2x+7}{x^2+4x+6}dx=\int \frac{2x+7+4-4}{x^2+4x+6}dx=\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}dx-\int \frac{3}{(x+2)^2+2}dx$$

Решим первый интеграл

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}dx=\left|\begin{matrix}x^2+4x+6=t\\ dt=(2x+4)dx\end{matrix}\right|=\int \frac{dt}{t}=\ell n(t)+C=\ell n\left|x^2+4x+6\right|+C$$

Решим второй интеграл

$$\int \frac{3}{(x+2)^2+2}dx=3\int \frac{1}{(x+2)^2+2}dx=\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{(x+2)}{\sqrt{2}}+C$$

В итоге решение интеграла:

$$\int \frac{2x+7}{x^2+4x+6}dx=\ell n\left|x^2+4x+6\right|+\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{(x+2)}{\sqrt{2}}+C$$

10.0 $\int \frac{x+3}{\sqrt{3-4x-x^2}}dx$

Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов, предварительно выделив в числителе подынтегральной функции слагаемое, равное производной подкоренного выражения из знаменателя:

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{3-4x-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{-2x-6+4-4}{\sqrt{3-4x-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{-4-2x}{\sqrt{3-4x-x^2}}dx-\frac{1}{2}\int \frac{2dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$$

Решим первый интеграл

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-4-2x}{\sqrt{3-4x-x^2}}dx=\left|\begin{matrix}3-4x-x^2=t\\ dt=(-4-2x)dx\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=-\sqrt{t}+C=$$

$$=-\sqrt{3-4x-x^2}+C$$

Решим второй интеграл

Применима формула: Табличная формула интегрирования $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$

Разложим знаменатель интеграла в квадрат суммы:

$$3-4x-x^2=-(x^2+4x+4)+3+4=7-(x+2)^2$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{7-(x+2)^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2-(x+2)^2}}=\arcsin\left(\frac{x+2}{\sqrt{7}}\right)+C$$

Тогда общее решение интеграла:

$$\int\frac{x+3}{\sqrt{3-4x-x^2}}dx=-\sqrt{3-4x-x^2}-\arcsin\left(\frac{x+2}{\sqrt{7}}\right)+C$$