

ИДЗ 8.2 – Вариант 0

Найти неопределенные интегралы.

$$1.0 \int \frac{2x+3}{5x^2+4} dx$$

Представим интеграл в следующем виде

$$\int \frac{2x+3}{5x^2+4} dx = \int \frac{2x}{5x^2+4} dx + \int \frac{3}{5x^2+4} dx$$

Первый интеграл

$$\int \frac{2x}{5x^2+4} dx = \left| \begin{matrix} 5x^2+4=t \\ dt=10xdx \end{matrix} \right| = \frac{2}{10} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5} \ln t + C = \frac{1}{5} \ln |5x^2+4| + C$$

Второй интеграл, табличный:

Применима формула: $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$

$$\int \frac{3}{5x^2+4} dx = 3 \int \frac{dx}{(\sqrt{5}x)^2+2^2} = \frac{3}{2\sqrt{5}} \arctg \frac{\sqrt{5}x}{2} + C$$

Тогда общее решение интеграла:

$$\int \frac{2x+3}{5x^2+4} dx = \frac{1}{5} \ln |5x^2+4| + \frac{3}{2\sqrt{5}} \arctg \frac{\sqrt{5}x}{2} + C$$

$$2.0 \int \frac{e^{4x}}{e^{4x}+9} dx$$

Сделаем замену $e^{4x}+9=t$, отсюда $dt=4e^{4x}dx$, $dx = \frac{1}{4e^{4x}} dt$

Также применима формула: $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

Получаем:

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{4x}+9} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln t + C$$

Возвратившись к старой переменной, имеем

$$\int \frac{e^{4x}}{e^{4x}+9} dx = \frac{1}{4} \ln |e^{4x}+9| + C$$

$$3.0 \int \frac{x^5 - 2x}{x^2 + 1} dx$$

Разделив числитель подынтегральной функции на знаменатель, выделим целую часть неправильной дроби, стоящей под знаком интеграла. Получим интеграл от алгебраической суммы:

$$\begin{array}{r} \frac{x^5 - 2x}{x^5 + x^3} \Bigg| \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} \\ \hline -x^3 - 2x \\ \hline -x^3 - x \\ \hline -x \end{array}$$

Тогда запишем

$$\int \frac{x^5 - 2x}{x^2 + 1} dx = \int \left(x^3 - x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx$$

Представим интеграл в следующем виде

$$\int \frac{x^5 - 2x}{x^2 + 1} dx = \int x^3 dx - \int x dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

Первый интеграл

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$$

Второй интеграл, табличный:

$$\int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$$

Третий интеграл

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 = t \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln t + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C$$

Тогда общее решение интеграла:

$$\int \frac{x^5 - 2x}{x^2 + 1} dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + C$$

$$4.0 \int \cos^3(3x + 5) dx$$

$$\int \cos^3(3x + 5) dx = \int \cos^2(3x + 5) \cdot \cos(3x + 5) dx =$$

Используя тригонометрическое тождество

$$\cos^2(3x + 5) = 1 - \sin^2(3x + 5)$$

Получаем:

$$\int \cos^3(3x + 5) dx = \int (1 - \sin^2(3x + 5)) \cos(3x + 5) dx$$

Сделаем замену $\sin(3x + 5) = t$, отсюда $dt = 3 \cos(3x + 5) dx$, $dx = \frac{1}{3 \cos(3x + 5)} dt$

Получаем:

$$\int \cos^3(3x + 5) dx = \int (1 - \sin^2(3x + 5)) \cos(3x + 5) dx = \frac{1}{3} \int (1 - t^2) dt = \frac{1}{3} \left(t - \frac{t^{2+1}}{2+1} \right) + C = \frac{1}{3} \left(t - \frac{t^3}{3} \right) + C = \frac{1}{3} t - \frac{t^3}{9} + C$$

Возвратившись к старой переменной, имеем

$$\int \cos^3(3x + 5) dx = \frac{1}{3} \sin(3x + 5) - \frac{\sin^3(3x + 5)}{9} + C$$

5.0 $\int \operatorname{ctg}^3 4x dx$

Так как согласно тригонометрическому тождеству

$$\operatorname{ctg}^2 4x = \frac{1}{\sin^2 4x} - 1; \quad \operatorname{ctg} 4x = \frac{\cos 4x}{\sin 4x}$$

Получаем:

$$\int \operatorname{ctg}^2 4x dx = \int \operatorname{ctg} 4x \left(\frac{1}{\sin^2 4x} - 1 \right) dx = \int \frac{\operatorname{ctg} 4x}{\sin^2 4x} dx - \int \operatorname{ctg} 4x dx = \int \frac{\operatorname{ctg} 4x}{\sin^2 4x} dx - \int \frac{\cos 4x}{\sin 4x} dx$$

Первый интеграл

$$\int \frac{\operatorname{ctg} 4x}{\sin^2 4x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{ctg} 4x = t \\ dt = -\frac{4}{\sin^2 4x} dx \end{array} \right| = -\frac{1}{4} \int t dt = -\frac{1}{4} \cdot \frac{t^{1+1}}{1+1} + C = -\frac{t^2}{8} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2 4x}{8} + C$$

Второй интеграл

$$\int \frac{\cos 4x}{\sin 4x} dx = \left| \begin{array}{l} \sin 4x = t \\ dt = 4 \cos 4x dx \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \cdot \ln t + C = \frac{1}{4} \ln |\sin 4x| + C$$

В итоге, решение интеграла:

$$\int \operatorname{ctg}^3 4x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^2 4x}{8} - \frac{1}{4} \ln |\sin 4x| + C$$

6.0 $\int \sin 9x \cos 6x dx$

Используя тригонометрическое тождество

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

применима формула: $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Получаем:

$$\begin{aligned} \int \sin 9x \cos 6x dx &= \int \frac{1}{2} (\sin(9-6)x + \sin(9+6)x) dx = \frac{1}{2} \int (\sin 3x + \sin 15x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 3x dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \sin 15x dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{15} \right) \cos 15x + C = -\frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{30} \cos 15x + C \end{aligned}$$

7.0 $\int \frac{dx}{3x^2 - 24x + 51}$

Вынесем 3 за скобку

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 24x + 42} = \int \frac{dx}{3(x^2 - 8x + 17)}$$

Разложим знаменатель интеграла в квадрат разности: $x^2 - 8x + 17 = x^2 - 2 \cdot 4x + 17 + 16 - 16 = (x - 4)^2 + 1$

Табличная формула интегрирования $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C$

Подставляем, получаем:

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 24x + 42} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-4)^2 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-4)^2 + 1^2} = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x-4}{1} \right) + C = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}(x-4) + C$$

$$8.0 \int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$$

Разложим знаменатель интеграла в квадрат суммы: $3-4x-x^2 = -(x^2+4x+4)+4+3 = 7-(x+2)^2$

Табличная формула интегрирования $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Подставляем, получаем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{7-(x+2)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{7})^2-(x+2)^2}} = \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{7}} + C$$

$$9.0 \int \frac{2x+7}{x^2+4x+6} dx$$

Разложим знаменатель интеграла в квадрат суммы: $x^2+4x+6 = x^2+4x+6+4-4 = (x+2)^2+2$

Применима формула: Табличная формула интегрирования $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Получаем:

$$\int \frac{2x+7}{x^2+4x+6} dx = \int \frac{2x+7+4-4}{x^2+4x+6} dx = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx - \int \frac{3}{(x+2)^2+2} dx$$

Решим первый интеграл

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx = \left| \begin{matrix} x^2+4x+6 = t \\ dt = (2x+4)dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln(t) + C = \ln|x^2+4x+6| + C$$

Решим второй интеграл

$$\int \frac{3}{(x+2)^2+2} dx = 3 \int \frac{1}{(x+2)^2+2} dx = \frac{3}{\sqrt{2}} \arctg \frac{(x+2)}{\sqrt{2}} + C$$

В итоге решение интеграла:

$$\int \frac{2x+7}{x^2+4x+6} dx = \ln|x^2+4x+6| + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctg \frac{(x+2)}{\sqrt{2}} + C$$

$$10.0 \int \frac{x+3}{\sqrt{3-4x-x^2}} dx$$

Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов, предварительно выделив в числителе подынтегральной функции слагаемое, равное производной подкоренного выражения из знаменателя:

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{3-4x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-6+4-4}{\sqrt{3-4x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-4-2x}{\sqrt{3-4x-x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$$

Решим первый интеграл

$$-\frac{1}{2} \int \frac{-4-2x}{\sqrt{3-4x-x^2}} dx = \left| \begin{matrix} 3-4x-x^2 = t \\ dt = (-4-2x)dx \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\sqrt{t} + C =$$

$$= -\sqrt{3-4x-x^2} + C$$

Решим второй интеграл

Применима формула: Табличная формула интегрирования $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

Наш сайт: Fizmathim.ru

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**

Решение задач по высшей математике на заказ

Разложим знаменатель интеграла в квадрат суммы:

$$3 - 4x - x^2 = -(x^2 + 4x + 4) + 3 + 4 = 7 - (x + 2)^2$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7 - (x + 2)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - (x + 2)^2}} = \arcsin\left(\frac{x + 2}{\sqrt{7}}\right) + C$$

Тогда общее решение интеграла:

$$\int \frac{x + 3}{\sqrt{3 - 4x - x^2}} dx = -\sqrt{3 - 4x - x^2} - \arcsin\left(\frac{x + 2}{\sqrt{7}}\right) + C$$

Fizmathim.ru