ИДЗ 8.3 – Вариант 0

Найти неопределенные интегралы.

1.0 $\int \sqrt{16-x^2}dx$

Сделаем замену $x = 4\sin t$ отсюда $dx = 4\cos tdt$

$$\sin t = \frac{x}{4}, \quad t = \arcsin\frac{x}{4}$$

Получаем:

$$\int \sqrt{16-x^2}dx = \int \sqrt{16-16\sin^2 t}\cdot 4\cos tdt = 16\int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos tdt = 16\int \cos t\cdot \cos tdt = 16\int \cos^2 tdt$$

Согласно тригонометрическому тождеству

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$\int \sqrt{16-x^2}dx = 16\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 8\int (1+\cos 2t)dt = 8t + \frac{8}{2}\sin 2t + C = 8t + 4\sin 2t + C = 8t + 8\sin t\cos t + C =$$

$$= 8t + 8\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C$$

Вернемся к старой замене

$$\int \sqrt{16-x^2}dx = 8\arcsin\frac{x}{4} + 2x\sqrt{1-\frac{1}{16}x^2} + C = 8\arcsin\frac{x}{4} + \frac{2x}{4}\sqrt{16-x^2} + C = 8\arcsin\frac{x}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + C$$

2.0 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$

Сделаем замену $x = \frac{1}{t}$, $t = \frac{1}{x}$ отсюда $dx = -\frac{dt}{t^2}$

Получаем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{t^2+5t+1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{t\cdot\frac{1}{t}\sqrt{t^2+5t+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}}$$

Разложим знаменатель в квадрат разности:

$$t^2+5t+1 = t^2 + 2\cdot\frac{5}{2}t + \frac{25}{4} + 1 - \frac{25}{4} = \left(t+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}$$

Применима формула: Табличная формула интегрирования $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|ax+\sqrt{a^2x^2-b^2}\right| + C$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}} = -\ell n\left|t+\frac{5}{2}+\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}\right| + C =$$

$$= -\ell n\left|t+\frac{5}{2}+\sqrt{t^2+5t+1}\right| + C$$

Вернемся к обратной замене $t = \frac{1}{x}$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = -\ell n\left|\frac{1}{x}+\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}+1}\right| + C = -\ell n\left|\frac{1}{x}+\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{1+5x+x^2}{x^2}}\right| + C = -\ell n\left|\frac{1}{x}+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x}\right| + C$$

3.0 $\int (x-7)\sin 5x dx$

Применим метод интегрирования по частям, причем справедлива формула

$\int u dv = uv - \int v du$

Пусть $u = (x-7)$, тогда $dv = \sin 5x dx$, $du = dx$, $v = -\frac{1}{5}\cos 5x$

Имеем:

$$\int (x-7)\sin 5x dx = -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x - \int -\frac{1}{5}\cos 5x dx = -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{5}\int \cos 5x dx =$$

$$= -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\sin 5x + C = -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C$$

4.0 $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Применим метод интегрирования по частям, причем справедлива формула

$\int u dv = uv - \int v du$

Пусть $u = \operatorname{arctg} x$, тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$, $v = \sqrt{1+x^2}$

Имеем:

$$\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{1+x^2} - \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{1+x^2} - \ell n\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$$

5.0 $\int \arccos 4x dx$

Применим метод интегрирования по частям, причем справедлива формула

$\int u dv = uv - \int v du$

Пусть $u = \arccos 4x$, тогда $dv = dx$, $du = -\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} dx$, $v = x$

Имеем:

$$\int \arccos 4x dx = x \arccos 4x - \int -\frac{4x dx}{\sqrt{1-16x^2}} = x \arccos 4x + \int \frac{4x dx}{\sqrt{1-16x^2}}$$

Решим интеграл:

$$\int \frac{4x dx}{\sqrt{1-16x^2}} = \left|\begin{matrix} 1-16x^2 = t \\ dt = -32x dx \end{matrix}\right| = -\frac{4}{32}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{8}\int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{8}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{8}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{4}t^{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-16x^2} + C$$

В итоге:

$$\int \arccos 4x dx = x\arccos 4x - \frac{1}{4}\sqrt{1-16x^2} + C$$

6.0 $\int xe^{x-7}dx$

Применим метод интегрирования по частям, причем справедлива формула

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Пусть $u = x$, тогда $dv = e^{x-7}dx$, $du = dx$, $v = e^{x-7}$

Имеем:

$$\int xe^{x-7}dx = xe^{x-7} - \int e^{x-7}dx = xe^{x-7} - e^{x-7} + C = e^{x-7}(x-1) + C$$

7.0 $\int (x^2+5)\cos xdx$

Применим метод интегрирования по частям, причем справедлива формула

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Пусть $u = x^2+5$, тогда $dv = \cos xdx$, $du = 2xdx$, $v = \sin x$

Имеем:

$$\int (x^2+5)\cos xdx = (x^2+5)\sin x - 2\int x\sin xdx$$

Пусть $u = x$, тогда $dv = \sin xdx$, $du = dx$, $v = -\cos x$

Тогда решение интеграла примет вид:

$$\int (x^2+5)\cos xdx = (x^2+5)\sin x - 2\int x\sin xdx = (x^2+5)\sin x - 2\left(-x\cos x - \int -\cos xdx\right) =$$

$$= (x^2+5)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C = (x^2+3)\sin x + 2x\cos x + C$$

8.0 $\int (x^2+9)e^x dx$

Применим метод интегрирования по частям, причем справедлива формула

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Пусть $u = x^2+9$, тогда $dv = e^x dx$, $du = 2xdx$, $v = e^x$

Имеем:

$$\int (x^2+9)e^x dx = (x^2+9)e^x - 2\int xe^x dx$$

Пусть $u = x$, тогда $dv = e^x dx$, $du = dx$, $v = e^x$

Имеем:

$$\int (x^2+9)e^x dx = (x^2+9)e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = (x^2+9)e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2+9+2-2x) + C =$$

$$= e^x(x^2-2x+11) + C$$