Наш сайт: **Fizmathim.ru**
Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh
Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**
Решение задач по высшей математике на заказ

ИДЗ 8.4 – Вариант 0

Найти неопределенные интегралы.

1.0 $\int \frac{4x+5}{(x+1)(x^2-5x+6)}dx$

Для интегрирования рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - полиномы, используется следующая последовательность шагов:

Если дробь неправильная (т.е. степень $P(x)$ больше степени $Q(x)$), преобразовать ее в правильную, выделив целое выражение;

Разложить знаменатель $Q(x)$ на произведение одночленов и/или несократимых квадратичных выражений;

Разложить рациональную дробь на простейшие дроби, используя метод неопределенных коэффициентов;

Вычислить интегралы от простейших дробей.

Запишем интеграл и разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\int \frac{4x+5}{(x+1)(x^2-5x+6)}dx = \int \frac{4x+5}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} \quad (1)$$

где $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

Отсюда

$4x+5 = A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x-2)(x+1)$

Найдем значения коэффициентов A, B, C

при $x=-1$

$1=12A$

$A=\frac{1}{12}$

при $x=2$

$13=-3B$

$B=-\frac{13}{3}$

при $x=3$

$17=4C$

$C=\frac{17}{4}$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов A, B, C получаем интеграл:

$$\int \frac{4x+5}{(x+1)(x^2-5x+6)}dx = \frac{1}{12}\cdot\int\frac{dx}{x+1}-\frac{13}{3}\cdot\int\frac{dx}{x-2}+\frac{17}{4}\int\frac{dx}{x-3} = \frac{1}{12}\ell n|x+1|-\frac{13}{3}\ell n|x-2|+\frac{17}{4}\ell n|x-3|+C$$

Наш сайт: **Fizmathim.ru**
Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh
Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**
Решение задач по высшей математике на заказ

2.0 $\int \frac{x+5}{(x+1)^2}dx$

Запишем интеграл и разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\int \frac{x+5}{(x+1)^2}dx = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} \qquad (1)$$

Отсюда

$x+5 = A + B(x+1)$

Найдем значения коэффициентов A, B

при $x=-1$

$4 = A$

при x=0

$5 = A + B$

$5 = 4 + B$

$B = 1$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов A, B получаем интеграл:

$$\int \frac{x+5}{(x+1)^2}dx = \int \frac{4}{(x+1)^2}dx + \int \frac{1}{x+1}dx = 4\cdot\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + \ell n|x+1| + C = 4\cdot\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n|x+1| + C =$$

$$= -\frac{4}{x+1} + \ell n|x+1| + C$$

Fizmathim.ru

Наш сайт: **Fizmathim.ru**
Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh
Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**
Решение задач по высшей математике на заказ

3.0 $\int \frac{(x^2-3x+1)dx}{x(x+1)(x-3)}$

$$\int \frac{(x^2-3x+1)dx}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3} \quad (1)$$

Отсюда

$$x^2-3x+1 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)$$

Найдем значения коэффициентов A, B, C

при $x=0$

$1=-3A$

$A=-\frac{1}{3}$

при $x=-1$

$5=4B$

$B=\frac{5}{4}$

при $x=3$

$1=12C$

$C=\frac{1}{12}$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов A, B, C получаем интеграл:

$$\int \frac{(x^2-3x+1)dx}{x(x+1)(x-3)} = -\frac{1}{3}\cdot\int\frac{dx}{x} + \frac{5}{4}\cdot\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-3} = -\frac{1}{3}\ell nx + \frac{5}{4}\ell n|x+1| + \frac{1}{12}\ln|x-3| + C$$

Fizmathim.ru

Наш сайт: **Fizmathim.ru**
Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh
Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**
Решение задач по высшей математике на заказ

4.0 $\int \frac{(2x^2+x-1)}{(x-1)^2(x+1)}dx$

Запишем интеграл и разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\int \frac{(2x^2+x-1)}{(x-1)^2(x+1)}dx = \frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1} \quad (1)$$

Отсюда

$$2x^2+x-1 = A(x+1)+B(x+1)(x-1)+C(x-1)^2$$

Найдем значения коэффициентов A, B, C

при $x=-1$

$0=4C$

$C=0$

при x=1

$2=2A$

$A=1$

при x=0

$-1=A-B+C$

$-1=1-B+2\cdot 0$

$-2=-B$

$B=2$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов A, B, C получаем интеграл:

$$\int \frac{(2x^2+x-1)}{(x-1)^2(x+1)}dx = 1\int \frac{dx}{(x-1)^2}+2\int \frac{dx}{x-1}dx+\int \frac{0}{x+1}dx = \int \frac{dx}{(x-1)^2}+2\int \frac{dx}{x-1}dx =$$

$$= \frac{(x-1)^{-1}}{-1}+2\ell n|x-1|+C = -\frac{1}{x-1}+2\ell n|x-1|+C$$

5.0 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$

Сделаем замену $\sqrt{x}=t, x=t^2$ отсюда $dx=2tdt$,

Получаем:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1} = \int \frac{2t\cdot tdt}{t^2+1} = 2\int \frac{t^2dt}{t^2+1} = 2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = \left\{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C\right\} = 2t-2\operatorname{arctg}t+C$$

Возвратившись к старой переменной, имеем

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1} = 2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$$

Наш сайт: **Fizmathim.ru**
Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh
Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**
Решение задач по высшей математике на заказ

6.0 $\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[6]{x+1}}dx$

Сделаем замену $\sqrt[6]{x+1}=t$, $\sqrt[3]{x+1}=t^2$ $\sqrt{x+1}=t^3$ $x=t^6-1$ отсюда $dx=6t^5dt$,
Получаем:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[6]{x+1}}dx=\int \frac{6t^3\cdot t^5dt}{t^2+3t}=6\int \frac{t^8dt}{t(t+3)}=6\int \frac{t^7dt}{t+3}$$

По теореме Безу:

$$\begin{array}{l|l}
\;\;t^7 & t+3 \\ \cline{2-2}
-\;t^7+3t^6 & t^6-3t^5+9t^4-27t^3+81t^2-243t+729 \\ \cline{1-1}
\;\;\;\;-3t^6 & \\
\;\;-\;-3t^6-9t^5 & \\ \cline{1-1}
\;\;\;\;\;\;\;\;9t^5 & \\
\;\;\;\;\;\;-\;9t^5+27t^4 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;-27t^4 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;-\;-27t^4-81t^3 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;81t^3 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;-\;81t^3+243t^2 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;-243t^2 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;-\;-243t^2-729t & \\
\;729t & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;-\;729t+2187 & \\
\;-2187 &
\end{array}$$

Решаем:

$$\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[6]{x+1}}=6\int\left(t^6-3t^5+9t^4-27t^3+81t^2-243t+729+\frac{-2187}{t+3}\right)dt=$$

$$=6\int t^6dt-18\int t^5dt+54\int t^4dt-162\int t^3dt+486\int t^2dt-1458\int tdt+4374\int dt-13122\int \frac{dt}{t+3}=$$

$$=6\frac{t^{6+1}}{6+1}-18\frac{t^{5+1}}{5+1}+54\frac{t^{4+1}}{4+1}-162\frac{t^{3+1}}{3+1}+486\frac{t^{2+1}}{2+1}-1458\frac{t^{1+1}}{1+1}+4374t-13122\ell n|t+3|+C=$$ Возвратившись к

$$=6\frac{t^7}{7}-18\frac{t^6}{6}+54\frac{t^5}{5}-162\frac{t^4}{4}+486\frac{t^3}{3}-1458\frac{t^2}{2}+4374t-13122\ell n|t+3|+C=$$

$$=\frac{6t^7}{7}-3t^6+\frac{54t^5}{5}-\frac{81t^4}{2}+162t^3-729t^2+4374t-13122\ell n|t+3|+C$$

старой переменной, имеем

$$\int \frac{\sqrt{x+1}dx}{\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[6]{x+1}}=\frac{6\sqrt[6]{(x+1)^7}}{7}-3(x+1)+\frac{54\sqrt[6]{(x+1)^5}}{5}-\frac{81\sqrt[3]{(x+1)^2}}{2}+162\sqrt{x+1}-729\sqrt[3]{x+1}+$$

$$+4374\sqrt[6]{x+1}-13122\ell n\left|\sqrt[6]{x+3}+1\right|+C$$

Fizmathim.ru

Наш сайт: **Fizmathim.ru**
Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh
Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**
Решение задач по высшей математике на заказ

7.0 $\int \frac{\sin x dx}{4-3\sin x}$

$$\begin{array}{r|l} \sin x & 4-3\sin x \\ \hline -\;\sin x-\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \hline \frac{4}{3} & \end{array}$$

Тогда

$$\int \frac{\sin x dx}{4-3\sin x}=\int\left(-\frac{1}{3}+\frac{\frac{4}{3}}{4-3\sin x}\right)dx=-\frac{1}{3}\int dx+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{4-3\sin x}=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\int\frac{dx}{4-3\sin x}$$

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$, откуда $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$ $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$

Тогда

$$\int\frac{dx}{4-3\sin x}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{4-3\cdot\frac{2z}{1+z^2}}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{4(1+z^2)-6z}{1+z^2}}=\int\frac{2dz}{(4(1+z^2)-6z)}=\int\frac{2dz}{4z^2-6z+4}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2-\frac{3}{2}z+1}$$

Знаменатель представим в виде квадрата разности:

$$z^2-\frac{3}{2}z+1=\left(z^2-\frac{3}{2}z+\frac{9}{16}\right)+1-\frac{9}{16}=\left(z-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}$$

Табличная формула интегрирования:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{4-3\sin x}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\left(z-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\operatorname{arctg}\frac{z-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\frac{4z-3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4z-3}{\sqrt{7}}+C$$

Возвращаемся к замене $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, тогда

$$\int\frac{\sin x dx}{4-3\sin x}=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}{\sqrt{7}}+C=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}{\sqrt{7}}+C$$

Наш сайт: **Fizmathim.ru**
Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh
Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**
Решение задач по высшей математике на заказ

8.0 $\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin 2x + 3\sin^2 x}$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin 2x + 3\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 3\sin^2 x}$$

Воспользуемся тригонометрической подстановкой

$tgx = z$, откуда $\sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$

Получаем:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 3\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{1}{1+z^2} - 2\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + 3\frac{z^2}{1+z^2}} =$$

$$= \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{1}{1+z^2} - \frac{2z}{1+z^2} + 3\frac{z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{1-2z+3z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{3z^2 - 2z + 1} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}}$$

Знаменатель представим как квадрат разности:

$$z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} = z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 3\sin^2 x} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}} = \left\{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3}}\operatorname{arctg}\frac{z - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} + C = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{(3z-1)}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{(3z-1)}{\sqrt{2}} + C$$

Возвращаемся к замене $z = tgx$, тогда

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 3\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{(3tgx - 1)}{\sqrt{2}} + C$$

Fizmathim.ru

Наш сайт: **Fizmathim.ru**
Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh
Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**
Решение задач по высшей математике на заказ

9.0 $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x}$

Используем случай

$\int \frac{\sin^{2n} x dx}{\cos^{2m} x} = \int \frac{\sin^{2n} x (\sin^2 x + \cos^2 x)^{m-n-1}}{\cos^{2m} x} dx$, где n, m – целые неотрицательные числа

Решаем интеграл

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x} = \int \frac{\sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^2 x (\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)}{\cos^8 x} dx =$$

$$= \int \frac{\sin^6 x + 2\sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^4 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x} dx + 2\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$$

Согласно тригонометрическому тождеству: $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, тогда запишем интегралы

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x} = \int \frac{\operatorname{tg}^6 x}{\cos^2 x} dx + 2\int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx$$

Воспользуемся заменой $\operatorname{tg} x = t$, $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

Тогда

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x} = \int \frac{\operatorname{tg}^6 x}{\cos^2 x} dx + 2\int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx = \int t^6 dt + 2\int t^4 dt + \int t^2 dt = \frac{t^7}{7} + 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + C$$

Возвратившись к старой переменной: $t = \operatorname{tg} x$

В итоге:

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x} = \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{2\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$$

Fizmathim.ru