

ИДЗ 8.4 – Вариант 0

Найти неопределенные интегралы.

$$1.0 \quad \int \frac{4x+5}{(x+1)(x^2-5x+6)} dx$$

Для интегрирования рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - полиномы, используется

следующая последовательность шагов:

Если дробь неправильная (т.е. степень $P(x)$ больше степени $Q(x)$), преобразовать ее в правильную, выделив целое выражение;

Разложить знаменатель $Q(x)$ на произведение одночленов и/или несократимых квадратичных выражений;

Разложить рациональную дробь на простейшие дроби, используя метод неопределенных коэффициентов;

Вычислить интегралы от простейших дробей.

Запишем интеграл и разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\int \frac{4x+5}{(x+1)(x^2-5x+6)} dx = \int \frac{4x+5}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \quad (1)$$

$$\text{где } x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Отсюда

$$4x+5 = A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x-2)(x+1)$$

Найдем значения коэффициентов A, B, C

$$\text{при } x = -1$$

$$1 = 12A$$

$$A = \frac{1}{12}$$

$$\text{при } x = 2$$

$$13 = -3B$$

$$B = -\frac{13}{3}$$

$$\text{при } x = 3$$

$$17 = 4C$$

$$C = \frac{17}{4}$$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов A, B, C получаем интеграл:

$$\int \frac{4x+5}{(x+1)(x^2-5x+6)} dx = \frac{1}{12} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{13}{3} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{17}{4} \int \frac{dx}{x-3} = \frac{1}{12} \ln|x+1| - \frac{13}{3} \ln|x-2| + \frac{17}{4} \ln|x-3| + C$$

Наш сайт: Fizmathim.ru

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

$$2.0 \int \frac{x+5}{(x+1)^2} dx$$

Запишем интеграл и разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\int \frac{x+5}{(x+1)^2} dx = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} \quad (1)$$

Отсюда

$$x+5 = A + B(x+1)$$

Найдем значения коэффициентов А, В

при $x = -1$

$$4 = A$$

при $x=0$

$$5 = A + B$$

$$5 = 4 + B$$

$$B = 1$$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов А, В получаем интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{(x+1)^2} dx &= \int \frac{4}{(x+1)^2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + \ln|x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ln|x+1| + C = \\ &= -\frac{4}{x+1} + \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

Наш сайт: Fizmathim.ru

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

$$3.0 \int \frac{(x^2 - 3x + 1)dx}{x(x+1)(x-3)}$$

$$\int \frac{(x^2 - 3x + 1)dx}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3} \quad (1)$$

Отсюда

$$x^2 - 3x + 1 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)$$

Найдем значения коэффициентов А, В, С

при $x = 0$

$$1 = -3A$$

$$A = -\frac{1}{3}$$

при $x = -1$

$$5 = 4B$$

$$B = \frac{5}{4}$$

при $x = 3$

$$1 = 12C$$

$$C = \frac{1}{12}$$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов А, В, С получаем интеграл:

$$\int \frac{(x^2 - 3x + 1)dx}{x(x+1)(x-3)} = -\frac{1}{3} \cdot \int \frac{dx}{x} + \frac{5}{4} \cdot \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{12} \int \frac{dx}{x-3} = -\frac{1}{3} \ln|x| + \frac{5}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{12} \ln|x-3| + C$$

$$4.0 \int \frac{(2x^2 + x - 1)}{(x-1)^2(x+1)} dx$$

Запишем интеграл и разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\int \frac{(2x^2 + x - 1)}{(x-1)^2(x+1)} dx = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \quad (1)$$

Отсюда

$$2x^2 + x - 1 = A(x+1) + B(x+1)(x-1) + C(x-1)^2$$

Найдем значения коэффициентов А, В, С

при $x = -1$

$$0 = 4C$$

$$C = 0$$

при $x=1$

$$2 = 2A$$

$$A = 1$$

при $x=0$

$$-1 = A - B + C$$

$$-1 = 1 - B + 2 \cdot 0$$

$$-2 = -B$$

$$B = 2$$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов А, В, С получаем интеграл:

$$\begin{aligned} \int \frac{(2x^2 + x - 1)}{(x-1)^2(x+1)} dx &= 1 \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{0}{x+1} dx = \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2 \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + 2 \ln|x-1| + C = -\frac{1}{x-1} + 2 \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

$$5.0 \int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1}$$

Сделаем замену $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$ отсюда $dx = 2t dt$,

Получаем:

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1} = \int \frac{2t \cdot t dt}{t^2 + 1} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = \left\{ \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C \right\} = 2t - 2 \arctg t + C$$

Возвратившись к старой переменной, имеем

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1} = 2\sqrt{x} - 2 \arctg \sqrt{x} + C$$

$$6.0 \int \frac{\sqrt{x+1} dx}{\sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[6]{x+1}}$$

Сделаем замену $\sqrt[6]{x+1} = t$, $\sqrt[3]{x+1} = t^2$, $\sqrt{x+1} = t^3$, $x = t^6 - 1$ отсюда $dx = 6t^5 dt$,

Получаем:

$$\int \frac{\sqrt{x+1} dx}{\sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[6]{x+1}} = \int \frac{6t^3 \cdot t^5 dt}{t^2 + 3t} = 6 \int \frac{t^8 dt}{t(t+3)} = 6 \int \frac{t^7 dt}{t+3}$$

По теореме Безу:

$$\begin{array}{r} t^7 \\ t^7 + 3t^6 \\ \hline -3t^6 \\ -3t^6 - 9t^5 \\ \hline 9t^5 \\ 9t^5 + 27t^4 \\ \hline -27t^4 \\ -27t^4 - 81t^3 \\ \hline 81t^3 \\ 81t^3 + 243t^2 \\ \hline -243t^2 \\ -243t^2 - 729t \\ \hline 729t \\ 729t + 2187 \\ \hline -2187 \end{array}$$

Решаем:

$$\int \frac{\sqrt{x+1} dx}{\sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[6]{x+1}} = 6 \int \left(t^6 - 3t^5 + 9t^4 - 27t^3 + 81t^2 - 243t + 729 + \frac{-2187}{t+3} \right) dt =$$

$$= 6 \int t^6 dt - 18 \int t^5 dt + 54 \int t^4 dt - 162 \int t^3 dt + 486 \int t^2 dt - 1458 \int t dt + 4374 \int dt - 13122 \int \frac{dt}{t+3} =$$

$$= 6 \frac{t^{6+1}}{6+1} - 18 \frac{t^{5+1}}{5+1} + 54 \frac{t^{4+1}}{4+1} - 162 \frac{t^{3+1}}{3+1} + 486 \frac{t^{2+1}}{2+1} - 1458 \frac{t^{1+1}}{1+1} + 4374t - 13122 \ln|t+3| + C = \text{Возвратившись к}$$

$$= 6 \frac{t^7}{7} - 18 \frac{t^6}{6} + 54 \frac{t^5}{5} - 162 \frac{t^4}{4} + 486 \frac{t^3}{3} - 1458 \frac{t^2}{2} + 4374t - 13122 \ln|t+3| + C =$$

$$= \frac{6t^7}{7} - 3t^6 + \frac{54t^5}{5} - \frac{81t^4}{2} + 162t^3 - 729t^2 + 4374t - 13122 \ln|t+3| + C$$

старой переменной, имеем

$$\int \frac{\sqrt{x+1} dx}{\sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[6]{x+1}} = \frac{6\sqrt[6]{(x+1)^7}}{7} - 3(x+1) + \frac{54\sqrt[6]{(x+1)^5}}{5} - \frac{81\sqrt[3]{(x+1)^2}}{2} + 162\sqrt{x+1} - 729\sqrt[3]{x+1} + 4374\sqrt[6]{x+1} - 13122 \ln|\sqrt[6]{x+3} + 1| + C$$

$$7.0 \int \frac{\sin x dx}{4-3\sin x}$$

$$= \frac{\sin x}{\sin x - \frac{4}{3}} \cdot \frac{4-3\sin x}{-\frac{1}{3}}$$

Тогда

$$\int \frac{\sin x dx}{4-3\sin x} = \int \left(-\frac{1}{3} + \frac{\frac{4}{3}}{4-3\sin x} \right) dx = -\frac{1}{3} \int dx + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{4-3\sin x} = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{4-3\sin x}$$

Вспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z, \text{ откуда } \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{4-3\sin x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{4-3 \cdot \frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{4(1+z^2)-6z}{1+z^2}} = \int \frac{2dz}{4(1+z^2)-6z} = \int \frac{2dz}{4z^2-6z+4} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2-\frac{3}{2}z+1}$$

Знаменатель представим в виде квадрата разности:

$$z^2 - \frac{3}{2}z + 1 = \left(z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{9}{16} \right) + 1 - \frac{9}{16} = \left(z - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{7}{16}$$

Табличная формула интегрирования:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{4-3\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\left(z - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{7}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \operatorname{arctg} \frac{z - \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4z-3}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4z-3}{\sqrt{7}} + C$$

Возвращаемся к замене $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, тогда

$$\int \frac{\sin x dx}{4-3\sin x} = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3}{\sqrt{7}} + C = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3}{\sqrt{7}} + C$$

$$8.0 \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin 2x + 3\sin^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin 2x + 3\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 3\sin^2 x}$$

Воспользуемся тригонометрической подстановкой

$$\operatorname{tg} x = z, \text{ откуда } \sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 3\sin^2 x} &= \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{1}{1+z^2} - 2\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + 3\frac{z^2}{1+z^2}} = \\ &= \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{1}{1+z^2} - \frac{2z}{1+z^2} + 3\frac{z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{1-2z+3z^2} = \int \frac{dz}{3z^2 - 2z + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Знаменатель представим как квадрат разности:

$$z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} = z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 3\sin^2 x} &= \frac{1}{3} \int \frac{dz}{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}} = \left\{ \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \right\} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3}} \operatorname{arctg} \frac{z - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{(3z-1)}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{(3z-1)}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

Возвращаемся к замене $z = \operatorname{tg} x$, тогда

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 3\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{(3\operatorname{tg} x - 1)}{\sqrt{2}} + C$$

Наш сайт: Fizmathim.ru

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

$$9.0 \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x}$$

Используем случай

$$\int \frac{\sin^{2n} x dx}{\cos^{2m} x} = \int \frac{\sin^{2n} x (\sin^2 x + \cos^2 x)^{m-n-1} dx}{\cos^{2m} x}, \text{ где } n, m - \text{ целые неотрицательные числа}$$

Решаем интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x} &= \int \frac{\sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 dx}{\cos^8 x} = \int \frac{\sin^2 x (\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) dx}{\cos^8 x} = \\ &= \int \frac{\sin^6 x + 2 \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^4 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x} dx + 2 \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx \end{aligned}$$

Согласно тригонометрическому тождеству: $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, тогда запишем интегралы

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x} = \int \frac{\operatorname{tg}^6 x}{\cos^2 x} dx + 2 \int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx$$

Вспользуемся заменой $\operatorname{tg} x = t$, $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

Тогда

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x} = \int \frac{\operatorname{tg}^6 x}{\cos^2 x} dx + 2 \int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx = \int t^6 dt + 2 \int t^4 dt + \int t^2 dt = \frac{t^7}{7} + 2 \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + C$$

Возвратившись к старой переменной: $t = \operatorname{tg} x$

В итоге:

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x} = \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + \frac{2 \operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C$$