ИДЗ 9.1 – Вариант 0

1. Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой.

1.0 $\int_0^{\pi/2} \cos^5 2x \sin 2x dx$

Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и F(x) – любая первообразная той функции на [a,b], то определенный интеграл от функции f(x) на [a,b] равен приращению первообразной на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Положим $t = \cos 2x$, тогда $dt = -2\sin 2x dx$. Если $x=\frac{\pi}{2}$, то $t = \cos 2\cdot\frac{\pi}{2} = \cos\pi = -1$; если $x=0$, то $t=1$

Поэтому: $\int_0^{\pi/2} \cos^5 2x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\int_1^{-1} t^5 dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^5 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{5+1}}{5+1}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^6}{6}\Big|_{-1}^{1} = \frac{t^6}{12}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1^6}{12} - \frac{(-1)^6}{12} = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$

2.0 $\int_1^2 (3x+2)\ell nx dx$

Пусть функции u=u(x) и v=v(x) имеют непрерывные производные на $[\alpha, \beta]$, тогда

$$\int_a^b u dv = (u\cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot du, \text{ где } (u\cdot v)\Big|_a^b = u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a)$$

Решаем определенный интеграл

$$\int_1^2 (3x+2)\ell nx dx = \left| \begin{matrix} u = \ell nx \\ dv = (3x+2)dx \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{(3x+2)^2}{6} \end{matrix} \right| = \frac{(3x+2)^2}{6}\ell nx\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(3x+2)^2}{6}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{(3\cdot 2+2)^2}{6}\ell n2 -$$

$$-\frac{(3\cdot 1+2)^2}{6}\ell n1 - \int_1^2 \frac{9x^2+12x+4}{6x}dx = \frac{8^2}{6}\ell n2 - 0 - \int_1^2\left(\frac{3x}{2} + 2 + \frac{2}{3x}\right)dx = \frac{32}{3}\ell n2 -$$

$$-\left(\frac{3x^2}{2\cdot 2} + 2x + \frac{2}{3}\ell nx\right)\Big|_1^2 = \frac{32}{3}\ell n2 - \frac{3\cdot 2^2}{4} - 2\cdot 2 - \frac{2}{3}\ell n2 + \frac{3\cdot 1^2}{4} + 2\cdot 1 + \frac{2}{3}\ell n1 = \frac{32}{3}\ell n2 - 3 - 4 -$$

$$-\frac{2}{3}\ell n2 + \frac{3}{4} + 2 = \frac{30}{3}\ell n2 - 7 + \frac{11}{4} = 10\ell n2 - \frac{17}{4} = 10\cdot 0{,}693 - 4{,}25 = 2{,}68$$

3.0 $\int_6^8 \frac{x}{(x-4)^2}dx$

Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и F(x) – любая первообразная той функции на [a,b], то определенный интеграл от функции f(x) на [a,b] равен приращению первообразной на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Запишем интеграл и разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\int_6^8 \frac{x}{(x-4)^2}dx = \frac{A}{(x-4)^2} + \frac{B}{x-4} \quad (1)$$

Отсюда

$$x = A + B(x-4)$$

Найдем значения коэффициентов A, B

при $x = 4$

$$4 = A$$

при $x = 0$

$$0 = A - 4B$$

$$0 = 4 - 4B$$

$$-4 = -4B$$

$$B = 1$$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов A, B получаем интеграл:

$$\int_6^8 \frac{x}{(x-4)^2}dx = \int_6^8 \frac{4}{(x-4)^2}dx + \int_6^8 \frac{1}{x-4}dx = \frac{4(x-4)^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_6^8 + \ell n|x-4|\Big|_6^8 = \frac{4(x-4)^{-1}}{-1}\Bigg|_6^8 + \ell n|x-4|\Big|_6^8 =$$

$$= -\frac{4}{x-4}\Bigg|_6^8 + \ell n|x-4|\Big|_6^8 = -\frac{4}{8-4} + \frac{4}{6-4} + \ell n|8-4| - \ell n|6-4| = -\frac{4}{4} + \frac{4}{2} + \ell n4 - \ell n2 = -1 + 2 + \ell n2 =$$

$$= 1 + \ell n2 = 1 + 0{,}693 \approx 1{,}69$$

4.0 $\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{7-x^2}dx$

Сделаем замену $x = \sqrt{7}\sin t$ отсюда $dx = \sqrt{7}\cos t dt$

$$t = \arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}, \quad \text{при } x = \sqrt{7}; \quad t = \arcsin\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } x = 0; \quad t = \arcsin\frac{0}{\sqrt{7}} = 0$$

Получаем:

$$\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{7-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(7-7\sin^2 t)}\cdot\sqrt{7}\cos t dt = 7\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\sin^2 t)}\cdot\cos t dt = 7\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cdot\cos t dt = 7\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

Согласно тригонометрическому тождеству

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

Тогда решение определенного интеграла:

$$\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{7-x^2}\,dx = 7\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{7}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{7}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{7}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7\pi}{4} - 0 + \frac{7}{4}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \frac{7}{4}\sin(2\cdot 0) =$$

$$= \frac{7\pi}{4} = \frac{7\cdot 3{,}14}{4} = 5{,}5$$

5.0 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, откуда $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ $\;dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

при $x = \frac{\pi}{2}$; $z = 1$, при $x = 0$; $z = 0$

Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^1 \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int_0^1 \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{1+z^2+1-z^2}{1+z^2}} = \int_0^1 \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2}{1+z^2}} = \int_0^1 dz = z\Big|_0^1 = 1-0 = 1$$

6.0 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и F(x) – любая первообразная той функции на [a,b], то определенный интеграл от функции f(x) на [a,b] равен приращению первообразной на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Представим знаменатель интеграла в виде квадрата суммы: $x^2+4x+5 = x^2+4x+4+1 = (x+2)^2+1$

Табличная формула интегрирования $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

Подставляем, получаем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \operatorname{arctg}\frac{x+2}{1}\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}(x+2)\Big|_0^1 = \operatorname{arctg}(1+2) - \operatorname{arctg}(0+2) =$$

$$= \operatorname{arctg}3 - \operatorname{arctg}2 = \frac{71\pi}{180} - \frac{63\pi}{180} = \frac{2\pi}{45} = \frac{2\cdot 3{,}14}{45} = 0{,}14$$

7.0 $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}}$

Сделаем замену $\sqrt{1+2x} = t$, $1+2x = t^2$, $x = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$ отсюда $dx = tdt$,

при $x = 4,\ t = 3$, при $x = 0,\ t = 1$

Получаем:

$$\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}} = \int_1^3 \frac{t\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right)dt}{t} = \int_1^3 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{2+1}}{2+1}\Bigg|_1^3 - \frac{1}{2}t\Bigg|_1^3 = \frac{t^3}{6}\Bigg|_1^3 - \frac{1}{2}t\Bigg|_1^3 = \frac{3^3}{6} - \frac{1^3}{6} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} - 1 =$$

$$= \frac{26}{6} - 1 = \frac{13}{3} - 1 = \frac{10}{3} = 3{,}33$$

8 Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

8.0 а) $\int_1^\infty \frac{xdx}{x^2+4}$

Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования (1 рода)

$\int_a^\infty f(x)dx$ от функции y=f(x) на полуинтервале $[a,+\infty)$ называется предел функции Φ(t) при

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

Если такой предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся к данному пределу. Если конечного предела не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.

$$\int_1^\infty \frac{xdx}{x^2+4} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{xdx}{x^2+4};$$

Найдем неопределенный интеграл?

$$\int \frac{xdx}{x^2+4}$$

Сделаем замену $x^2 + 4 = t$ отсюда $dt = 2xdx$, $dx = \frac{1}{2x}dt$

Получаем:

$$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ell nt + C$$

Возвратившись к старой переменной, имеем

$$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ell n\left|x^2+4\right| + C$$

Окончательно получаем:

$$\int_1^\infty \frac{xdx}{x^2+4} = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{xdx}{x^2+4} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\ell n\left|x^2+4\right|\Bigg|_1^t = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\left(\ell n\left|t^2+4\right| - \ell n\left|1^2+4\right|\right) = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\left(\ell n\left|\infty+4\right| - \ell n5\right) = \infty$$

расходится

б) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3}$

Если функция f(x) непрерывна при $a \le x < b$ и имеет точку разрыва x = b, тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[F(b-\varepsilon)-F(a)\right] = \lim_{\varepsilon\to+0}F(b-\varepsilon)-F(a)$$

Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке $x = 0$. Следовательно, по определению

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3} = \int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3} = -\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\Bigg|_{-1}^{\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_{-1}^{\varepsilon} = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{1}{x^2}\Bigg|_{-1}^{\varepsilon} = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{(-1)^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to0+0}\left(\frac{1}{0^2}-1\right) = -\infty \text{ расходится}$$