

ИДЗ 9.1 – Вариант 0

1. Вычислить определенные интегралы с точностью до двух знаков после запятой.

$$1.0 \int_0^{\pi/2} \cos^5 2x \sin 2x dx$$

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – любая первообразная той функции на $[a,b]$, то определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a,b]$ равен приращению первообразной на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Положим $t = \cos 2x$, тогда $dt = -2 \sin 2x dx$. Если $x = \frac{\pi}{2}$, то $t = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \cos \pi = -1$; если $x=0$, то $t = 1$

$$\text{Поэтому: } \int_0^{\pi/2} \cos^5 2x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int_1^{-1} t^5 dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t^5 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{5+1}}{5+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^6}{6} \Big|_{-1}^1 = \frac{t^6}{12} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^6}{12} - \frac{(-1)^6}{12} = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$$

$$2.0 \int_1^2 (3x+2) \ln x dx$$

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на $[\alpha, \beta]$, тогда

$$\int_a^b u dv = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du, \text{ где } (u \cdot v) \Big|_a^b = u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a)$$

Решаем определенный интеграл

$$\int_1^2 (3x+2) \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = (3x+2) dx \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{(3x+2)^2}{6} \end{array} \right| = \frac{(3x+2)^2}{6} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(3x+2)^2}{6} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{(3 \cdot 2 + 2)^2}{6} \ln 2 -$$

$$- \frac{(3 \cdot 1 + 2)^2}{6} \ln 1 - \int_1^2 \frac{9x^2 + 12x + 4}{6x} dx = \frac{8^2}{6} \ln 2 - 0 - \int_1^2 \left(\frac{3x}{2} + 2 + \frac{2}{3x} \right) dx = \frac{32}{3} \ln 2 -$$

$$- \left(\frac{3x^2}{2 \cdot 2} + 2x + \frac{2}{3} \ln x \right) \Big|_1^2 = \frac{32}{3} \ln 2 - \frac{3 \cdot 2^2}{4} - 2 \cdot 2 - \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3 \cdot 1^2}{4} + 2 \cdot 1 + \frac{2}{3} \ln 1 = \frac{32}{3} \ln 2 - 3 - 4 -$$

$$- \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{4} + 2 = \frac{30}{3} \ln 2 - 7 + \frac{11}{4} = 10 \ln 2 - \frac{17}{4} = 10 \cdot 0,693 - 4,25 = 2,68$$

$$3.0 \int_6^8 \frac{x}{(x-4)^2} dx$$

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – любая первообразная той функции на $[a,b]$, то определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a,b]$ равен приращению первообразной на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Запишем интеграл и разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\int_6^8 \frac{x}{(x-4)^2} dx = \frac{A}{(x-4)^2} + \frac{B}{x-4} \quad (1)$$

Отсюда

$$x = A + B(x-4)$$

Найдем значения коэффициентов A, B

при $x = 4$

$$4 = A$$

при $x = 0$

$$0 = A - 4B$$

$$0 = 4 - 4B$$

$$-4 = -4B$$

$$B = 1$$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов A, B получаем интеграл:

$$\begin{aligned} \int_6^8 \frac{x}{(x-4)^2} dx &= \int_6^8 \frac{4}{(x-4)^2} dx + \int_6^8 \frac{1}{x-4} dx = \frac{4(x-4)^{-2+1}}{-2+1} \Big|_6^8 + \ln|x-4| \Big|_6^8 = \frac{4(x-4)^{-1}}{-1} \Big|_6^8 + \ln|x-4| \Big|_6^8 = \\ &= -\frac{4}{x-4} \Big|_6^8 + \ln|x-4| \Big|_6^8 = -\frac{4}{8-4} + \frac{4}{6-4} + \ln|8-4| - \ln|6-4| = -\frac{4}{4} + \frac{4}{2} + \ln 4 - \ln 2 = -1 + 2 + \ln 2 = \\ &= 1 + \ln 2 = 1 + 0,693 \approx 1,69 \end{aligned}$$

$$4.0 \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{7-x^2} dx$$

Сделаем замену $x = \sqrt{7} \sin t$ отсюда $dx = \sqrt{7} \cos t dt$

$$t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{7}}, \text{ при } x = \sqrt{7}; t = \arcsin \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\pi}{2} \text{ при } x = 0; t = \arcsin \frac{0}{\sqrt{7}} = 0$$

Получаем:

$$\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{7-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(7-7\sin^2 t)} \cdot \sqrt{7} \cos t dt = 7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\sin^2 t)} \cdot \cos t dt = 7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t dt = 7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

Согласно тригонометрическому тождеству

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

Тогда решение определенного интеграла:

$$\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{7-x^2} dx = 7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{7}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt = \frac{7}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{7}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7\pi}{4} - 0 + \frac{7}{4} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \frac{7}{4} \sin(2 \cdot 0) =$$

$$= \frac{7\pi}{4} = \frac{7 \cdot 3,14}{4} = 5,5$$

5.0 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$

Вспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z, \text{ откуда } \sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

при $x = \frac{\pi}{2}$; $z = 1$, при $x = 0$; $z = 0$

Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^1 \frac{2dz}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int_0^1 \frac{2dz}{\frac{1+z^2+1-z^2}{1+z^2}} = \int_0^1 \frac{2dz}{\frac{2}{1+z^2}} = \int_0^1 dz = z \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$$

6.0 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – любая первообразная той функции на $[a,b]$, то определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a,b]$ равен приращению первообразной на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Представим знаменатель интеграла в виде квадрата суммы: $x^2+4x+5 = x^2+4x+4+1 = (x+2)^2+1$

Табличная формула интегрирования $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

Подставляем, получаем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \operatorname{arctg} \frac{x+2}{1} \Big|_0^1 = \operatorname{arctg}(x+2) \Big|_0^1 = \operatorname{arctg}(1+2) - \operatorname{arctg}(0+2) =$$

$$= \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2 = \frac{71\pi}{180} - \frac{63\pi}{180} = \frac{2\pi}{45} = \frac{2 \cdot 3,14}{45} = 0,14$$

$$7.0 \int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}}$$

Сделаем замену $\sqrt{1+2x} = t$, $1+2x = t^2$, $x = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$ отсюда $dx = tdt$,

при $x = 4$, $t = 3$, при $x = 0$, $t = 1$

Получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}} &= \int_1^3 \frac{t\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right)dt}{t} = \int_1^3 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{2+1}}{2+1} \Big|_1^3 - \frac{1}{2}t \Big|_1^3 = \frac{t^3}{6} \Big|_1^3 - \frac{1}{2}t \Big|_1^3 = \frac{3^3}{6} - \frac{1^3}{6} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} - 1 = \\ &= \frac{26}{6} - 1 = \frac{13}{3} - 1 = \frac{10}{3} = 3,33 \end{aligned}$$

8 Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость:

$$8.0 \text{ а) } \int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$$

Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования (1 рода)

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ от функции $y=f(x)$ на полуинтервале $[a, +\infty)$ называется предел функции $\Phi(t)$ при

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx$$

Если такой предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся к данному пределу. Если конечного предела не существует, то несобственный интеграл называется расходящимся.

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{xdx}{x^2+4};$$

Найдем неопределенный интеграл?

$$\int \frac{xdx}{x^2+4}$$

Сделаем замену $x^2+4 = t$ отсюда $dt = 2xdx$, $dx = \frac{1}{2x} dt$

Получаем:

$$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln t + C$$

Возвратившись к старой переменной, имеем

$$\int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + C$$

Окончательно получаем:

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{xdx}{x^2+4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln|x^2+4| \Big|_1^t = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln|t^2+4| - \ln|1^2+4|) = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln|\infty+4| - \ln 5) = \infty$$

расходится

Наш сайт: [Fizmathim.ru](https://fizmathim.ru)

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на [Готовые решения ИДЗ Рябушко \(по вариантам\)](#)

Решение задач по высшей математике на заказ

$$6) \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3}$$

Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \leq x < b$ и имеет точку разрыва $x = b$, тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [F(b-\varepsilon) - F(a)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(b-\varepsilon) - F(a)$$

Подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке $x = 0$. Следовательно, по определению

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{x^{-3+1}}{-3+1} \Big|_{-1}^{\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_{-1}^{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{1}{x^2} \Big|_{-1}^{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{(-1)^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{0^2} - 1 \right) = -\infty \text{ расходится} \end{aligned}$$

Fizmathim.ru