ИДЗ 9.2 – Вариант 0

1. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

1.0 $y = (x + 1)^2$, $y^2 = x + 1$

В общем случае, когда данная фигура ограничена двумя кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и двумя вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$, $x \in [a; b]$, имеем

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

$y = (x+1)^2$; $\quad y^2 = x+1 \Rightarrow y = \sqrt{x+1}$

Находим точки пересечения данных кривых:

$(x+1)^2 = \sqrt{x+1}$

$(x+1)^4 = x+1$

$(x+1)^3 - (x+1) = 0$

$(x+1)^3(x+1-1) = 0$

$x_1 = 0 \qquad (x+1)^3 = 0$

$\qquad\qquad x_2 = -1$

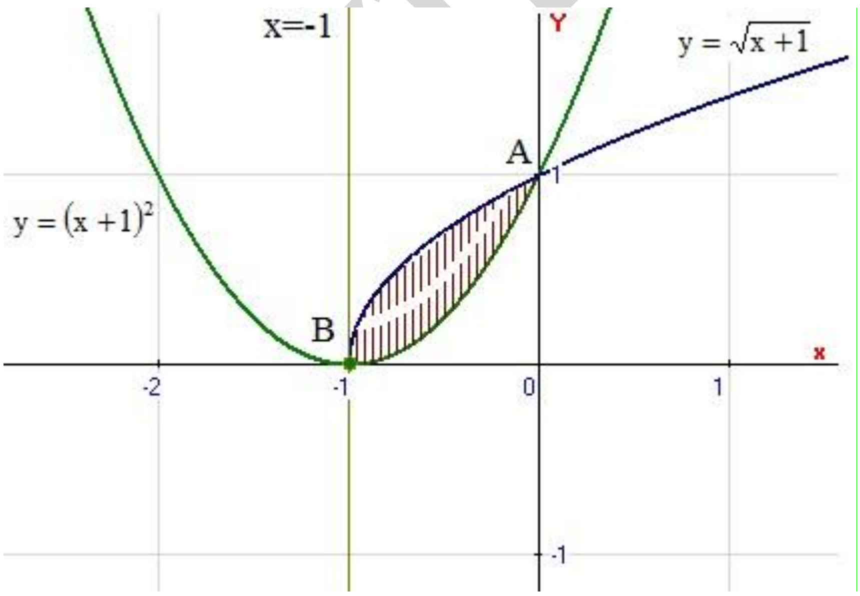
При $x_1 = 0$; $y_1 = 1$; $x_2 = -1$; $y_2 = 0$

Точки $A(0; 1)$, $B(-1; 0)$

Тогда

$$S = \int_{-1}^{0} \sqrt{x+1}dx - \int_{-1}^{0} (x+1)^2 dx = \left.\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{(x+1)^{2+1}}{2+1}\right|_{-1}^{0} = \left.\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{(x+1)^3}{3}\right|_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}} - (-1+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{(0+1)^3}{3} + \frac{(-1+1)^3}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = 0,33 \text{ кв.ед.}$$

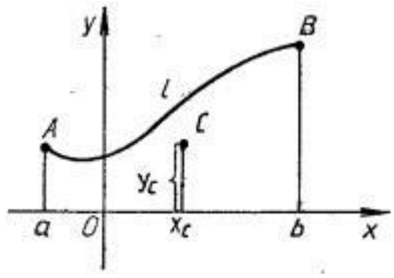


2. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) длину дуги данной линии.

2.0 $y = \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$

Пусть дуга AB кривой задана уравнением y = f(x), где f(x) – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда длина дуги AB

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$



Пределы интегрирования

$x \in \left[\sqrt{3};\ \sqrt{15}\right]$

Найдем y'

$$y' = (\ell n x)' = \frac{1}{x}$$

Тогда длина дуги ℓ:

$$\ell = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$$

Сделаем замену $\sqrt{x^2+1} = t,\ x^2+1 = t^2,\ x = \sqrt{t^2-1},\ dx = \dfrac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}}$

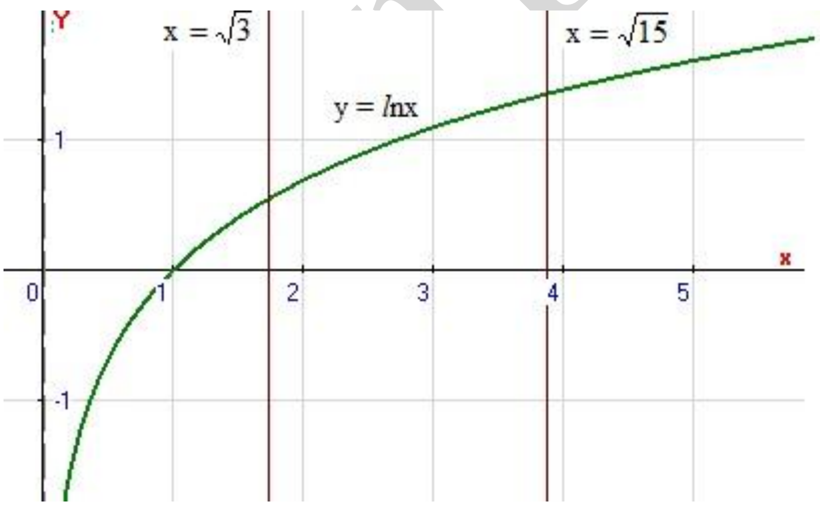
при $x = \sqrt{15};\ t = \sqrt{\left(\sqrt{15}\right)^2+1} = 4$ при $x = \sqrt{3};\ t = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1} = 2$

Вычисляем

$$\ell = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int_2^4 \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \cdot \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-1}} = \int_2^4 \frac{t^2\,dt}{t^2-1} = \int_2^4 \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$= \left(t - \frac{1}{2}\ell n\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\right)\Bigg|_2^4 = \left(4 - \frac{1}{2}\ell n\left|\frac{4+1}{4-1}\right|\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\ell n\left|\frac{2+1}{2-1}\right|\right) = 4 - \frac{1}{2}\ell n\left|\frac{5}{3}\right| - 2 + \frac{1}{2}\ell n 3 = 2 - \frac{1}{2}\ell n\left|\frac{5}{9}\right| =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\ell n\frac{9}{5} = 2 + 0{,}5 \cdot 0{,}588 = 2 + 0{,}29 = 2{,}29$$



3. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением фигуры Ф вокруг указанной оси координат.

3.0 Ф: $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$, Ox

Находим объем фигуры, образованного вращением вокруг оси Ox

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Находим точки пересечения данных кривых:

$$y = -x^2 + 5x - 6; \quad y = 0$$
$$-x^2 + 5x - 6 = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4\cdot 1\cdot 6 = 25 - 24 = 1$$
$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}; \ x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \ x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$$

Пределы интегрирования

$$x \in [2,\ 3]$$

Тогда объем тела вращения

$$V_x = \pi\int_2^3 \left(-x^2 + 5x - 6\right)^2 dx = \pi\int_2^3 (x-3)^2(x-2)^2 dx = \pi\int_2^3 \left(x^2 - 6x + 9\right)\left(x^2 - 4x + 4\right)dx =$$

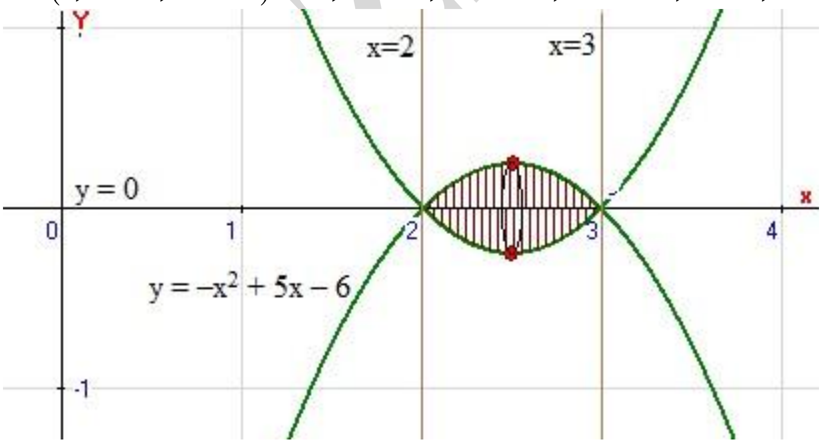
$$= \pi\int_2^3 \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 6x^3 + 24x^2 - 24x + 9x^2 - 36x + 36\right)dx = \pi\int_2^3 \left(x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36\right)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{x^{4+1}}{4+1} - 10\frac{x^{3+1}}{3+1} + 37\frac{x^{2+1}}{2+1} - 60\frac{x^{1+1}}{1+1} + 36x\right)\Bigg|_2^3 = \pi\left(\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^4}{2} + 37\frac{x^3}{3} - 30x^2 + 36x\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= \pi\left(\frac{3^5}{5} - 5\cdot\frac{3^4}{2} + 37\cdot\frac{3^3}{3} - 30\cdot 3^2 + 36\cdot 3\right) - \pi\left(\frac{2^5}{5} - 5\cdot\frac{2^4}{2} + 37\cdot\frac{2^3}{3} - 30\cdot 2^2 + 36\cdot 2\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{243}{5} - \frac{405}{2} + 333 - 270 + 108\right) - \pi\left(\frac{32}{5} - 40 + \frac{296}{3} - 120 + 72\right) = \pi(48{,}6 - 202{,}5 + 171) -$$

$$-\pi(6{,}4 + 98{,}67 - 88) = 17{,}1\pi - 17{,}067\pi = 0{,}033\pi = 0{,}033\cdot 3{,}14 = 0{,}11 \text{ куб.ед.}$$



4. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой L вокруг указанной оси.

4.0 L: $\rho = 4\cos\varphi$, полярная ось

Кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, где $\rho(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha, \beta]$. Этот случай с помощью формул перехода $x = \rho(\varphi)\cdot\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi$ приводится к параметрической форме задания кривой и к формуле площади поверхности

$$S = 2\pi\int_{\beta}^{\alpha} \rho\sin\varphi\sqrt{\rho_{\varphi}'^2 + \rho^2}\,d\varphi$$

Найдем ρ':

$\rho' = (4\cos\varphi)' = -4\sin\varphi$

$\sqrt{(-4\sin\varphi)^2 + (4\cos\varphi)^2} = 4\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = 4$

Пределы интегрирования $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

Тогда

$$S = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\varphi\cos\varphi\cdot 2d\varphi = 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = 16\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi\sin^2\frac{\pi}{2} - 8\pi\sin^2 0 = 8\pi = 25{,}12$$

По графику видно, что