ИДЗ 10.1 – Вариант 0.

1. Найти область определения указанных функций.

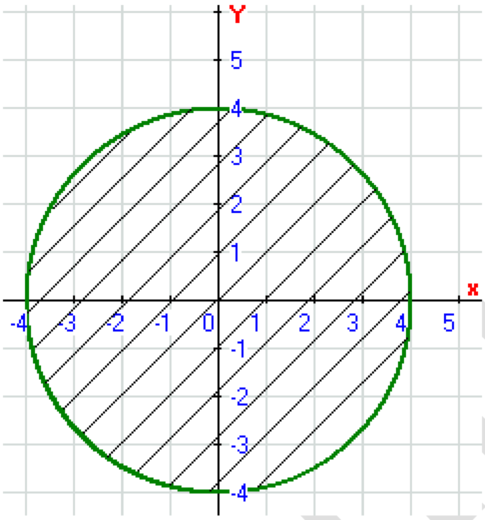
1.0 $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

Учитываем, что подкоренное выражение больше либо равно нулю.

$16 - x^2 - y^2 \geq 0$

$x^2 + y^2 \leq 16$

Строим на плоскости.



Область определения – множество точек плоскости, лежащих внутри окружности с центром в начале координат и радиусом $R = 4$ и на этой окружности.

2. Найти частные производные и частные дифференциалы следующих функций.

2.0 $z = e^{x^2+3y^2}$

Дифференциал функции $z = f(x, y)$, найденный при условии, что одна из независимых переменных изменяется, а вторая остается постоянной, называется частным дифференциалом, т.е. по определению $d_x z = f'_x(x, y)dx,\ d_y z = f'_y(x, y)dy$, где $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$ - произвольные приращения независимых переменных, называемые их дифференциалами.

Вначале найдем частные производные функции, использовав формулу дифференцирования сложной функции одной переменной

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{x^2+3y^2}\right)'_x = e^{x^2+3y^2} \cdot \left(x^2 + 3y^2\right)'_x = e^{x^2+3y^2} \cdot 2x^{2-1} = 2xe^{x^2+3y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{x^2+3y^2}\right)'_y = e^{x^2+3y^2} \cdot \left(x^2 + 3y^2\right)'_y = e^{x^2+3y^2} \cdot 3 \cdot 2y^{2-1} = 6ye^{x^2+3y^2}$$

Теперь находим частные дифференциалы:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx = 2xe^{x^2+3y^2}dx,$$

$$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy = 6ye^{x^2+3y^2}dy.$$

3. Вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$, для данной функции $f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой

3.0 $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 2$, $M_0(1, 1, 1)$

Находим частные производные данной функции, затем вычисляем их значения в точке $M_0(1, 1, 1)$

$$f'_x(x,y,z) = \left(x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 2\right)'_x = 3x^{3-1} - yz = 3x^2 - yz$$
$$f'_x(1,1,1) = 3\cdot 1^2 - 1\cdot 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f'_y(x,y,z) = \left(x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 2\right)'_y = 3y^{3-1} - xz = 3y^2 - xz$$
$$f'_y(1,1,1) = 3\cdot 1^2 - 1\cdot 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f'_z(x,y,z) = \left(x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 2\right)'_z = 3z^{3-1} - xy = 3z^2 - xy$$
$$f'_z(1,1,1) = 3\cdot 1^2 - 1\cdot 1 = 3 - 1 = 2$$

4. Найти полные дифференциалы указанных функций.

4.0 $z = \sqrt{5x^2 + 8y^2 + 12}$

Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sqrt{5x^2 + 8y^2 + 12}\right)'_x = \frac{5\cdot 2x^{2-1}}{2\sqrt{5x^2 + 8y^2 + 12}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 8y^2 + 12}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sqrt{5x^2 + 8y^2 + 12}\right)'_y = \frac{8\cdot 2y^{2-1}}{2\sqrt{5x^2 + 8y^2 + 12}} = \frac{8y}{\sqrt{5x^2 + 8y^2 + 12}}$$

Согласно формуле $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ имеем

где $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ - произвольные приращения независимых переменных, называемые их дифференциалами

$$dz = \frac{5x}{\sqrt{5x^2 + 8y^2 + 12}}dx + \frac{8y}{\sqrt{5x^2 + 8y^2 + 12}}dy$$

5. Вычислить значение производной сложной функции u=u(x, y), где x=x(t), y=y(t), при $t=t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

5.0 $u = \ln(e^{3x} + e^{2y})$, $x = t^3$, $y = t^5$, $t_0 = 1$

На основании формулы $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\ell n\left(e^{3x} + e^{2y}\right)\right)'_x = \frac{3e^{3x}}{e^{3x} + e^{2y}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(t^3\right)' = 3t^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\ell n\left(e^{3x} + e^{2y}\right)\right)'_y = \frac{2e^{2y}}{e^{3x} + e^{2y}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(t^5\right)' = 5t^4$$

Получаем:

$$\frac{du}{dt} = \frac{3e^{3x}}{e^{3x} + e^{2y}} \cdot 3t^2 + \frac{2e^{2y}}{e^{3x} + e^{2y}} \cdot 5t^4$$

При $t_0 = 1$ получаем, что $x = 1^3 = 1;\ \ y = 1^5 = 1$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=1} = \frac{3e^{3\cdot 1}}{e^{3\cdot 1} + e^{2\cdot 1}} \cdot 3\cdot 1^2 + \frac{2e^{2\cdot 1}}{e^{3\cdot 1} + e^{2\cdot 1}} \cdot 5\cdot 1^4 = \frac{3e^3}{e^3 + e^2}\cdot 3 + \frac{2e^2}{e^3 + e^2}\cdot 5 = \frac{9e^3 + 10e^2}{e^3 + e^2}$$

Ответ: $\left.\dfrac{du}{dt}\right|_{t=1} = \dfrac{9e^3 + 10e^2}{e^3 + e^2}$

6. Вычислить значения частных производных функции z(x, y) заданной неявно, в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точностью до двух знаков после запятой.

6.0 $x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 2$, $M_0(1, 1, 1)$

В данном случае $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 2$, поэтому

$$F'_x = \left(x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 2\right)'_x = 3x^{3-1} - yz = 3x^2 - yz$$

$$F'_y = \left(x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 2\right)'_y = 3y^{3-1} - xz = 3y^2 - xz$$

$$F'_z = \left(x^3 + y^3 + z^3 - xyz - 2\right)'_z = 3z^{3-1} - xy = 3z^2 - xy$$

Следовательно, по формулам
Если уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает функцию двух переменных $z(x, y)$ в неявном виде и $F'_z(x, y, z) = 0$, то справедливы формулы:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)},$$

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - yz}{3z^2 - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2 - xz}{3z^2 - xy}$$

Вычисляем значения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M_0(1, 1, 1)$

$$\frac{\partial z(1, 1, 1)}{\partial x} = -\frac{3 \cdot 1^2 - 1 \cdot 1}{3 \cdot 1^2 - 1 \cdot 1} = -\frac{3-1}{3-1} = -1 \qquad \frac{\partial z(1, 1, 1)}{\partial y} = -\frac{3 \cdot 1^2 - 1 \cdot 1}{3 \cdot 1^2 - 1 \cdot 1} = -\frac{3-1}{3-1} = -1$$

Ответ: $\frac{\partial z(1, 1, 1)}{\partial x} = z'_x(1, 1, 1) = -1$, $\frac{\partial z(1, 1, 1)}{\partial y} = z'_y(1, 1, 1) = -1$