Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

ИДЗ 10.2 – Вариант 0.

1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

1.0 S:
$$z = 1/2x^2 - 1/2y^2$$
, $M_0(3, 1, 4)$

Находим частные производные:

$$f_x'(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)_x' = \frac{1}{2} \cdot 2x^{2-1} = x$$

$$f_y'(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right)_y' = -\frac{1}{2} \cdot 2y^{2-1} = -y$$

Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(3, 1)$:

$$f'_{x}(3, 1) = 3$$

$$f_{y}'(3, 1) = -1$$

Если поверхность задана уравнением z = f(x, y), то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к данной поверхности

$$z-z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y-y_0)$$

А уравнение нормали через точку $M_0(x_0, y_0)$

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Тогда, подставляя найденные значения, найдем уравнение касательной:

$$z-4=3(x-3)-1(y-1)$$

уравнение нормали

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{-1}$$

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

2. Найти вторые частные производные указанных функций. Убедиться в том, что z"ху= z"ух

2.0
$$z = e^{3x^2 + 5y^2}$$

Вначале находим первые частные производные данной функции:

$$z'_{x} = \left(e^{3x^{2}+5y^{2}}\right)'_{x} = 3 \cdot 2xe^{3x^{2}+5y^{2}} = 6xe^{3x^{2}+5y^{2}}$$
$$z'_{y} = \left(e^{3x^{2}+5y^{2}}\right)'_{y} = 5 \cdot 2ye^{3x^{2}+5y^{2}} = 10ye^{3x^{2}+5y^{2}}$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по х и по у, находим вторые частные производные данной функции:

$$z''_{xx} = \left(6xe^{3x^2+5y^2}\right)_x' = 6e^{3x^2+5y^2} + 6x \cdot 3 \cdot 2xe^{3x^2+5y^2} = 6e^{3x^2+5y^2} + 36x^2e^{3x^2+5y^2}$$
$$z''_{yy} = \left(10ye^{3x^2+5y^2}\right)_y' = 10e^{3x^2+5y^2} + 10y \cdot 5 \cdot 2ye^{3x^2+5y^2} = 10e^{3x^2+5y^2} + 100y^2e^{3x^2+5y^2}$$

Найдем:
$$z''_{xy}$$
 и z''_{yx}

$$z''_{xy} = \left(6xe^{3x^2 + 5y^2}\right)_y' = 6x \cdot 5 \cdot 2ye^{3x^2 + 5y^2} = 60xye^{3x^2 + 5y^2}$$
$$z''_{yx} = \left(10ye^{3x^2 + 5y^2}\right)_x' = 10y \cdot 3 \cdot 2xe^{3x^2 + 5y^2} = 60xye^{3x^2 + 5y^2}$$

Спеловательно

$$z_{xy}^{\prime\prime}=z_{yx}^{\prime\prime}$$

3. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция и.

3.0
$$9 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
, $u = e^{-\cos(x+3y)}$

Находим частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{-\cos(x+3y)}\right)_{x}' = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \left(-\cos(x+3y)\right)_{x}' = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{-\cos(x+3y)}\right)_{y}' = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \left(-\cos(x+3y)\right)_{y}' = 3e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y)$$

$$\frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}} = \left(e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y)\right)_{x}' = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y) \cdot \sin(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)} \cdot \cos(x+3y) = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin^{2}(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)} \cdot \cos(x+3y)$$

$$\frac{\partial^{2} u}{\partial y^{2}} = \left(3e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y)\right)_{x}' = 3e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y) \cdot 3\sin(x+3y) + 3e^{-\cos(x+3y)} 3\cos(x+3y) = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin^{2}(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y) + 3e^{-\cos(x+3y)} 3\cos(x+3y) = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin^{2}(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y) \cdot \sin(x+3y) + 3e^{-\cos(x+3y)} 3\cos(x+3y) = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin^{2}(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y) + 3e^{-\cos(x+3y)} 3\cos(x+3y) = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin^{2}(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)} \cdot \cos(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin^{2}(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)} \cdot \cos(x+3y)$$

Подставляем полученные значения производных в левую часть и правую часть исходного уравнения:

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

$$9 \cdot \left(e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin^2(x+3y) + e^{-\cos(x+3y)} \cdot \cos(x+3y)\right) = 9e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin^2(x+3y) + 9e^{-\cos(x+3y)} \cdot \cos(x+3y)$$

$$9e^{-\cos(x+3y)} \left(\sin^2(x+3y) + \cos(x+3y)\right) = 9e^{-\cos(x+3y)} \left(\sin^2(x+3y) + \cos(x+3y)\right)$$

Следовательно, функция и удовлетворяет исходному уравнению

4. Исследовать на экстремум следующие функции.

4.0
$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$$

Находим первые частные производные данной функции

$$z'_{x} = (x^{2} + xy + y^{2} - 2x - y)'_{x} = 2x + y - 2$$

$$z'_{y} = (x^{2} + xy + y^{2} - 2x - y)'_{y} = 2y + x - 1$$

Приравнивая их к нулю, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2y + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ 2(2 - 2x) + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ 4 - 4x + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - 2x \\ -3x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Стационарная точка данной функции: М(1,0)

Для того, чтобы сформулировать достаточные условия экстремума функции двух переменных, введем следующие обозначения:

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0) \Delta = AC - B^2$$

Достаточные условия экстремума.

Если $\Delta > 0$, то $\mathbf{M}_0(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ является точкой экстремума для данной функции, причем \mathbf{M}_0 будет точкой максимума при $\mathbf{A} < 0$ (C < 0) и точкой минимума при $\mathbf{A} > 0$ (C > 0)

Если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;

Если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть;

Найдем вторые частные производные данной функции:

$$z''_{xx} = (2x + y - 2)'_{x} = 2$$

 $z''_{xy} = (2x + y - 2)'_{y} = 1$
 $z''_{yy} = (2y + x - 1)'_{y} = 2$

Подставляя в полученные выражения для производных координаты стационарных точек, и используя достаточные условия экстремума

Для точки M(1,0)

$$A = z''_{xx} = 2$$
; $B = z''_{xy} = 1$; $C = z''_{yy} = 2$

$$\Delta = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$$
 экстремум есть в точке M(1; 0)

Так как $A > 0 \ (C > 0)$, то в точке M будет минимум

$$z_{min} = z(1; 0) = 1^2 + 1 \cdot 0 + 0^2 - 2 \cdot 1 - 0 = 1 - 2 = -1$$

Otbet:
$$z_{min} = z(1; 0) = -1$$

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z=z(x, y) в области D, ограниченной заданными линиями

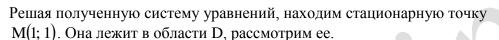
5.0
$$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$$
, D: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$

Выясним, существуют ли стационарные точки, лежащие внутри данной области D, т.е. внутри треугольника ABC

$$z'_{x} = (x^{2} - 2y^{2} + 4xy - 6x + 5)'_{x} = 2x + 4y - 6$$

$$z'_{y} = (x^{2} - 2y^{2} + 4xy - 6x + 5)'_{y} = 4x - 4y$$

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 4y = 6 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y = 6 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$



$$z(1; 1) = 1^2 - 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 5 = 1 - 2 + 4 - 6 + 5 = 2$$

Исследуем значения функции на границе области D, состоящей из линий x = 0, y = 0, x + y = 3

$$x = 0$$
, $0 \le y \le 3$, отсюда $z = -2y^2 + 5$, $z'_y = -4y$, $-4y = 0$; $y = 0$

Точка Е(0; 0) совпадает с точкой А

$$z(0; 0) = 0^2 - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$$

$$y=0,\ 0\le x\le 3$$
 , отсюда $z=x^2-6x+5$, $z_x'=2x-6$, $2x=6$, $x=3$

Точка F(3; 0) совпадает с точкой С

$$z(3; 0) = 3^2 - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 3 \cdot 0 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$

$$y = 3 - x$$
, $0 \le x \le 3$, отсюда

$$z = x^2 + 2(3-x)^2 + 4x(3-x) - 6x + 5 = x^2 + 18 - 12x + 2x^2 + 12x - 4x^2 - 6x + 5 = -x^2 - 6x + 23$$

 $z'_x = -2x - 6, \ x = -3$, Точка $G(-3; 6)$ не лежит в области D

Найдем значения функции в точках пересечения линий, ограничивающих область D.

$$z(0; 0) = 0^2 - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$$

$$z(3; 0) = 3^2 - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 3 \cdot 0 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$

$$z(0; 3) = 0^2 - 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 0 \cdot 3 - 6 \cdot 0 + 5 = -18 + 5 = -13$$

Выберем наибольшее и наименьшее значения

$$z_{\text{Haum}}(0; 0) = 5, z_{\text{Haum}}(0; 3) = -13$$

