ИДЗ 12.1 – Вариант 0.

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму.

1.0 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+35n-6}$

Знаменатель приравняем к нулю, решим квадратное уравнение

$49n^2+35n-6=0$

$D=b^2-4ac=1225+4\cdot6\cdot49=1225+1176=2401$

$n_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};\ n_1=\frac{-35+49}{2\cdot49}=\frac{14}{98}=\frac{1}{7};\ n_2=\frac{-35-49}{2\cdot49}=-\frac{84}{98}=-\frac{6}{7}$

Тогда ряд можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+35n-6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{\left(n-\frac{1}{7}\right)\left(n+\frac{6}{7}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{(7n-1)(7n+6)}$$

Общий член $a_n=\frac{7}{(7n-1)(7n+6)}$ данного ряда представим в виде суммы простейших дробей:

$$a_n=\frac{7}{(7n-1)(7n+6)}=\frac{A}{7n-1}+\frac{B}{7n+6}$$

Тогда: $7=A(7n+6)+B(7n-1)$

При $n=-\frac{6}{7};\ \ 7=-7B\Rightarrow B=-1$

При $n=\frac{1}{7};\ \ 7A=7\Rightarrow A=1$

Поэтому $a_n=\frac{1}{7n-1}-\frac{1}{7n+6}$

Найдем сумму первых n членов ряда:

$S_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{20}+\frac{1}{20}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{6}-\frac{1}{7n+6}$

Вычислим сумму ряда:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7n+6}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{\infty}\right)=\frac{1}{6}$$

Сумма ряда $S=\frac{1}{6}$, данный ряд сходится

2. Исследовать на сходимость указанные ряды с положительными членами.(2-6)

2.0 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{3^n}\cdot n}$

Воспользуемся признаком Д'Аламбера

Пусть для ряда $u_1+u_2+\ldots u_n\ldots\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $u_n>0$ (начиная с некоторого n=n$_0$) и существует предел

$$\lim_{n\to\infty}=\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$$

Тогда
1) при q<1 данный ряд сходится;
2) при q>1 данный ряд расходится.

где $a_n=\frac{2^n}{\sqrt{3^n}\cdot n}$, $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3^{n+1}}\cdot(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3^{n+1}}\cdot(n+1)}}{\frac{2^n}{\sqrt{3^n}\cdot n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot\sqrt{3^n}\cdot n}{\sqrt{3^{n+1}}\cdot(n+1)\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2\cdot\sqrt{3^n}\cdot n}{\sqrt{3^n}\cdot\sqrt{3}\cdot(n+1)\cdot 2^n}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 1=\frac{2}{\sqrt{3}}=1{,}154>1\ \text{ряд расходится}$$

Ответ: ряд расходится

3.0 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n\arcsin^n\frac{\pi}{3n}$

Если, начиная с некоторого n=n$_0$, $u_n>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то

при q < 1 ряд сходится, а
при q > 1 ряд расходится
при q = 1 радикальный признак Коши не применим

Согласно радикальному признаку Коши, имеем:

$$a_n=n^n\arcsin^n\frac{\pi}{3n}$$

Заменим арксинус эквивалентной величиной $\arcsin\frac{\pi}{3n}\sim\frac{\pi}{3n}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n\arcsin^n\frac{\pi}{3n}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\arcsin\frac{\pi}{3n}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{\pi}{3n}=\frac{\pi}{3}=\frac{3{,}14}{3}=1{,}05>1$$

ряд расходится

Ответ: ряд расходится

4.0 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{3n^2-1}}$

Воспользуемся интегральным признаком Коши.
Для этого исследуем несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{3x^2-1}}=\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{xdx}{\sqrt{3x^2-1}}$$

Решим неопределенный интеграл:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{3x^2-1}}=\left|\begin{matrix}3x^2-1=t\\ dt=6xdx\end{matrix}\right|=\frac{1}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{1}{6}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{6}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{3}\sqrt{t}+C=\frac{1}{3}\sqrt{3x^2-1}+C$$

Тогда

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{xdx}{\sqrt{3x^2-1}}=\frac{1}{3}\lim_{\beta\to\infty}\sqrt{3x^2-1}\Big|_1^{\beta}=\frac{1}{3}\lim_{\beta\to\infty}\left(\sqrt{3\beta^2-1}-\sqrt{3\cdot1^2-1}\right)=\frac{1}{3}\left(\infty-\sqrt{2}\right)=\infty$$

Так как интеграл расходится, следовательно, исследуемый ряд тоже расходится

Ответ: ряд расходится

5.0 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}$

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Используем предельный признак сравнения $a_n=\frac{n}{n^2+4}$, $b_n=\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2+4}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+4}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2+4}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{n^2}}=\frac{1}{1+\frac{4}{\infty}}=1\neq0$$

Таким образом, исследуемый ряд расходится вместе с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Ответ: ряд расходится

6.0 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - 1}$

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Используем предельный признак сравнения $a_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n^2-1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{2n^2-1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Получено конечное число, отличное от нуля, значит, исследуемый ряд сходится вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Ответ: ряд сходится

Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды. (7-8)

7.0 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-1}}$

Используем признак Лейбница.
Данный ряд является знакочередующимся.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{3^{\infty}} = 0$ - условие выполняется

Ряд сходится по признаку Лейбница.
Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$

Воспользуемся признаком Д'Аламбера

где $a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$, $a_{n+1} = \frac{1}{3^{n-1+1}} = \frac{1}{3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3 \cdot 3^n} = \frac{1}{3} < 1$$

Так как $q < 1$, следовательно, исследуемый ряд сходится
Исходный ряд абсолютно сходится

Ответ: ряд абсолютно сходится

8.0 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\ell n\, n}{n}$

Используем признак Лейбница.
Данный ряд является знакочередующимся.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ell n\, n}{n}=\frac{\infty}{\infty}=\{\text{по правилу Лопиталя}\}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ell n\, n)'}{(n)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$$ - условие выполняется

Ряд сходится по признаку Лейбница.
Исследуем ряд на абсолютную сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell n\, n}{n}$$

Воспользуемся интегральным признаком Коши.
Для этого исследуем несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty}\frac{\ell n\, n}{n}=\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{\ell n\, n}{n}=\lim_{\beta\to\infty}\left.\frac{\ell n^2\, n}{2}\right|_1^{\beta}=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}\left(\ell n^2\beta-\ell n^2 1\right)=\frac{1}{2}\cdot(\infty-0)=\infty$$

Так как интеграл расходится, следовательно, исследуемый ряд тоже расходится
Исходный ряд условно сходится

Ответ: ряд условно сходится