Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

ИДЗ 15.1 - Вариант 0

1. Дана функция u(M) = u(x, y, z) и точки M_1 , M_2 . Вычислить: 1) производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) grad $u(M_1)$

1.0.
$$u(M) = 3x^2y^2z^2$$
, $M_1(-2, 1, 1)$, $M_2(3, -1, 0)$

1. Вычислим производную функции $u(M) = u(x,\,y,\,z)$ в точке M_1 по направлению вектора

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1; \ \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1; \ \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1) = (3 - (-2); -1 - 1; \ 0 - 1) = (5; -2; -1)$$

Получили вектор $\overline{M_1M_2} = (5; -2; -1)$

Справедлива формула для функции u = f(x, y, z)

$$\frac{du(M_1)}{\partial \overline{M_1 M_2}} = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\bigg|_{M_1} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\bigg|_{M_1} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\bigg|_{M_1} \cdot \cos\gamma$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = \left(3x^2y^2z^2\right)'_x = 3 \cdot 2xy^2z^2 = 6xy^2z^2$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x}\Big|_{M_1} = 6 \cdot (-2) \cdot 1^2 \cdot 1^2 = -12$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y} = \left(3x^2y^2z^2\right)'_y = 3 \cdot 2yx^2z^2 = 6yx^2z^2$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial y}\bigg|_{M_1} = 6 \cdot 1 \cdot (-2)^2 \cdot 1^2 = 24$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{M})}{\partial \mathbf{z}} = \left(3\mathbf{x}^2\mathbf{y}^2\mathbf{z}^2\right)'_{\mathbf{z}} = 3 \cdot 2\mathbf{z}\mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 = 6\mathbf{z}\mathbf{x}^2\mathbf{y}^2$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{M})}{\partial \mathbf{z}}\Big|_{\mathbf{M}_1} = 6 \cdot 1 \cdot (-2)^2 \cdot 1^2 = 24$$

Найдем модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\left| \overrightarrow{\mathbf{M}_{1}} \overrightarrow{\mathbf{M}_{2}} \right| = \left| \overrightarrow{\mathbf{a}} \right| = \sqrt{a_{x}^{2} + a_{y}^{2} + a_{z}^{2}} = \sqrt{5^{2} + \left(-2\right)^{2} + \left(-1\right)^{2}} = \sqrt{25 + 4 + 1} = \sqrt{30}$$

Направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|} = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|a|} = -\frac{2}{\sqrt{30}}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|a|} = -\frac{1}{\sqrt{30}}$$

Запишем производную функции в точке M_1 по направлению вектора $\overline{M_1M_2}$;

$$\frac{\mathrm{du}(M_1)}{\partial \overline{M_1 M_2}} = -12 \cdot \frac{5}{\sqrt{30}} + 24 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{30}}\right) + 24 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{30}}\right) = -\frac{60}{\sqrt{30}} - \frac{48}{\sqrt{30}} - \frac{24}{\sqrt{30}} = -\frac{132}{\sqrt{30}}$$

2. Согласно определению, градиент функции u = f(x, y, z) в точке M_1 получаем по формуле

grad
$$\mathbf{u}(\mathbf{M}_1) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{M}_1} \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{M}_1} \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} \Big|_{\mathbf{M}_1} \mathbf{k}$$

Тогда, согласно данным, полученным в пункте 1 градиент функции равен

grad
$$u(M_1) = -12\vec{i} + 24\vec{j} + 24\vec{k}$$

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

2. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости (p), отсеченная координатными плоскостями.

2.0.
$$\iint_{S} (5x - 2y + 3z) dS, (p): x - y + z = 2$$

Из уравнения плоскости находим z = 2 - x + y

Находим частные производные z'_x и z'_y

$$z'_{x} = (2 - x + y)'_{x} = -1$$

$$z'_{y} = (2 - x + y)'_{y} = 1$$

Применяем формулу

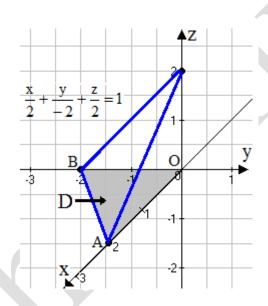
(дифференциал поверхности)

$$dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy$$

$$dS = \sqrt{1+1^2 + (-1)^2} dxdy = \sqrt{1+1+1} dxdy = \sqrt{3} dxdy$$

Запишем уравнение плоскости x - y + z - 2 = 0В виде уравнения в отрезках:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{2} = 1$$



Сводим вычисление поверхностного интеграла к вычислению двойного интеграла по области D, где D - треугольник AOB, являющийся проекцией поверхности S на плоскость Oxy.

$$\begin{split} &\iint\limits_{S} (5x - 2y + 3z) dS = \iint\limits_{D} (5x - 2y + 3(2 - x + y)) \sqrt{3} dx dy = \iint\limits_{D} (5x - 2y + 6 - 3x + 3y) \sqrt{3} dx dy = \\ &= \iint\limits_{D} (2x + y + 6) \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x - 2}^{0} (2x + y + 6) dy = \sqrt{3} \int\limits_{0}^{2} dx \left(2xy + \frac{y^{2}}{2} + 6y \right) \bigg|_{x - 2}^{0} = \\ &= -\sqrt{3} \int\limits_{0}^{2} dx \left(2x(x - 2) + \frac{(x - 2)^{2}}{2} + 6(x - 2) \right) = -\sqrt{3} \int\limits_{0}^{2} \left(2x^{2} - 4x + \frac{x^{2} - 4x + 4}{2} + 6x - 12 \right) dx = \\ &= -\sqrt{3} \int\limits_{0}^{2} \left(2x^{2} + 2x + \frac{x^{2}}{2} - 2x + 2 - 12 \right) dx = -\sqrt{3} \int\limits_{0}^{2} \left(\frac{5}{2} x^{2} - 10 \right) dx = -\sqrt{3} \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{x^{3}}{3} - 10x \right) \bigg|_{0}^{2} = -\sqrt{3} \left(\frac{5x^{3}}{6} - 10x \right) \bigg|_{0}^{2} = \\ &= -\sqrt{3} \left(\frac{5 \cdot 2^{3}}{6} - 10 \cdot 2 \right) + \sqrt{3} \left(\frac{5 \cdot 0^{3}}{6} - 10 \cdot 0 \right) = -\sqrt{3} \left(\frac{5 \cdot 4}{3} - 20 \right) = -\sqrt{3} \left(\frac{20 - 60}{3} \right) = \frac{40\sqrt{3}}{3} \end{split}$$

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

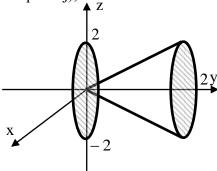
Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

3. Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

3.0. $\iint_S yz dy dz + x^2 dx dz + y^2 dx dy$, где S — часть поверхности конуса $x^2 + z^2 = y^2$ (нормальный вектор n

которой образует тупой угол с ортом j), отсекаемая плоскостями $y=0,\,y=2.$



Если обозначить проекции поверхности S на координатные плоскости Oyz, Oxz и Oxy через D_x , D_y , D_z соответственно, а данный интеграл I рассматривать как сумму трех интегралов:

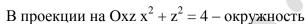
$$I_1 = \iint_S yz dy dz$$
, $I_2 = \iint_S x^2 dx dz$, $I_3 = \iint_S y^2 dx dy$

В проекции на Оуz конус имеет вид $x^2 = y^2 - z^2$

Из соображения симметрии, следует

Получаем

$$I_1 = \iint_{S} yz dy dz = \iint_{D_x} yz dy dz - \iint_{D_x} yz dy dz = 0$$



Для вычисления интеграла I_2 перейдем к полярным координатам, положив

$$x = \rho \cos \varphi$$
, $z = \rho \sin \varphi$, $dxdz = \rho d\rho d\varphi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le \rho \le 2$

$$y^2 = x^2 + z^2 = \rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi = \rho^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \rho^2$$

$$\rho^2=4 \Longrightarrow \rho=2$$

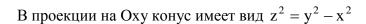
где область D_y – круг $x^2 + z^2 = 4$, y = 0, являющийся проекцией поверхности конуса

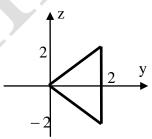
на плоскость Oxz. Так как нормаль n поверхности образует тупой угол c ортом j, то перед интегралом I_2 ставится знак «—»

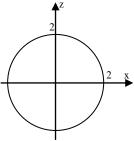
Тогда получаем

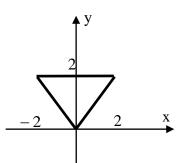
$$\begin{split} &I_{2} = - \iint_{S} x^{2} dxdz = - \iint_{D_{y}} x^{2} dxdz = - \iint_{D_{y}} \rho^{2} \cos^{2} \phi \cdot \rho d\rho d\phi = - \int_{0}^{2\pi} \cos^{2} \phi d\phi \int_{0}^{2} \rho^{3} d\rho = - \int_{0}^{2\pi} \cos^{2} \phi d\phi \cdot \frac{\rho^{4}}{4} \bigg|_{0}^{2} = \\ &= - \int_{0}^{2\pi} \cos^{2} \phi d\phi \cdot \left(\frac{2^{4}}{4} - \frac{0^{4}}{4} \right) = - \int_{0}^{2\pi} \cos^{2} \phi d\phi \cdot \frac{16}{4} = -4 \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{2} \right) d\phi = -2 \left(\phi + \frac{1}{2} \sin 2\phi \right) \bigg|_{0}^{2\pi} = 0 \end{split}$$

$$= -2\left(2\pi + \frac{1}{2}\sin 2 \cdot 2\pi - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 2 \cdot 0\right)\right) = -2\left(2\pi + \frac{1}{2}\cdot 0\right) = -4\pi$$









Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

Получаем

Так как проекция параллельна плоскости Ох

Из соображения симметрии, следует

$$I_3 = \iint_S y^2 dx dy = 0$$

В итоге:

$$\iint_{S} y \, x \, dy \, dz + x^{2} \, dx \, dz + y^{2} \, dx \, dy = I_{1} + I_{2} + I_{3} = 0 - 4\pi + 0 = -4\pi$$

4. Вычислить поток векторного поля a(M) через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью (p) и координатными плоскостями, двумя способами: a) использовав определение потока; б) с помощью формулы Остроградского – Гаусса.

4.0.
$$a(M) = (3y + 2z)i + (2x + 3y)j + yk$$
, (p): $x + 2y + 2z = 2$

Вычисляем поток векторного поля с помощью поверхностного интеграла

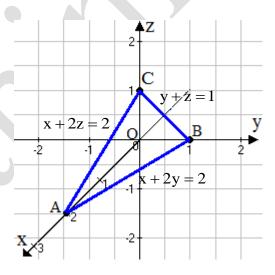
$$\Pi = \iint\limits_{S} a \cdot n^{0} dS$$

где S – внешняя сторона поверхности пирамиды ABCO

Вначале вычислим поток через каждую из четырех граней пирамиды.

Грань AOC лежит в плоскости y = 0, нормаль к этой грани $n_1^0 = -j$, dS = dxdz

Тогда поток векторного поля а(М) через грань АОС



$$\begin{split} &\Pi_1 = - \iint\limits_{\Delta AOC} (2x + 3y) dS = - \iint\limits_{\Delta AOC} 2x dx dz = - \int\limits_0^2 2x dx \int\limits_0^{1 - \frac{x}{2}} dz = - \int\limits_0^2 2x dx \cdot z \bigg|_0^{1 - \frac{x}{2}} = - \int\limits_0^2 2x dx \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) = \\ &= - \int\limits_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = - \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \bigg|_0^2 = - \left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) + \left(0^2 - \frac{0^3}{3}\right) = - \left(4 - \frac{8}{3}\right) = - \left(\frac{12 - 8}{3}\right) = -\frac{4}{3} \end{split}$$

Грань AOB лежит в плоскости z = 0, нормаль к этой грани $n_2^0 = -k$, dS = dxdy

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные приме н по высшей математике

$$\begin{split} &\Pi_2 = - \iint\limits_{\Delta AOB} y \, dS = - \iint\limits_{\Delta AOB} y \, dx dy = - \int\limits_0^2 dx \, \int\limits_0^{1 - \frac{x}{2}} y \, dy = - \int\limits_0^2 dx \cdot \frac{y^2}{2} \bigg|_0^{1 - \frac{x}{2}} = - \int\limits_0^2 dx \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} \right)^2 = \\ &= - \int\limits_0^2 dx \cdot \frac{1}{2} \left(1 - x + \frac{x^2}{4} \right) = - \int\limits_0^2 dx \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} x + \frac{x^2}{8} \right) = - \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{24} x^3 \right) \bigg|_0^2 = \\ &= - \left(\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{24} \cdot 2^3 \right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{24} \cdot 0^3 \right) = - \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = - \frac{1}{3} \end{split}$$

Грань ВОС лежит в плоскости x=0, нормаль к данной грани $n_3^0=-i,\ dS=dydz$

$$\begin{split} &\Pi_{3} = -\iint_{\Delta BOC} (3y+2z) dS = -\iint_{\Delta BOC} (3y+2z) dy dz = -\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1-y} (3y+2z) dz = -\int_{0}^{1} dy \cdot (3yz+z^{2}) \Big|_{0}^{1-y} = \\ &= -\int_{0}^{1} dy \Big(3y(1-y) + (1-y)^{2} \Big) = -\int_{0}^{1} \Big(3y-3y^{2} + (1-2y+y^{2}) \Big) dy = -\int_{0}^{1} \Big(3y-3y^{2} + 1-2y+y^{2} \Big) dy = \\ &= -\int_{0}^{1} \Big(1+y-2y^{2} \Big) dy = -\left(y + \frac{y^{2}}{2} - \frac{2y^{3}}{3} \right) \Big|_{0}^{1} = -\left(1 + \frac{1^{2}}{2} - \frac{2 \cdot 1^{3}}{3} \right) + \left(0 + \frac{0^{2}}{2} - \frac{2 \cdot 0^{3}}{3} \right) = -\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = -\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \right) = \\ &= -\frac{9-4}{6} = -\frac{5}{6} \end{split}$$

Грань АВС лежит в плоскости
$$x+2y+2z=2$$
 нормаль к этой грани
$$n_4^0 = \frac{i+2j+2k}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{i+2j+2k}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{i+2j+2k}{\sqrt{9}} = \frac{i+2j+2k}{3}$$

Находим частные производные z'_x и z'_y

$$z'_{x} = \left(1 - \frac{x}{2} - y\right)'_{x} = -\frac{1}{2}$$

$$z'_{y} = \left(1 - \frac{x}{2} - y\right)'_{y} = -1$$

Применяем формулу (дифференциал поверхности)

$$dS = \sqrt{1 + {z'}_x^2 + {z'}_y^2} dxdy$$

$$dS = \sqrt{1 + {\left(-\frac{1}{2} \right)}^2 + {\left(-1 \right)}^2} dxdy = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} dxdy = \sqrt{\frac{9}{4}} dxdy = \frac{3}{2} dxdy$$
 Тогда

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

$$\begin{split} &\Pi_4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \iint_{\Delta ABC} ((3y + 2z) + 2(2x + 3y) + 2y) dxdy = \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} (3y + 2z + 4x + 6y + 2y) dxdy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} (4x + 11y + 2z) dxdy = \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} (4x + 11y + 2\left(1 - \frac{x}{2} - y\right)) dxdy = \frac{1}{2} \iint_{\Delta ABC} (4x + 11y + 2 - x - 2y) dxdy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{0}^{2} dx \int_{0}^{1 - \frac{x}{2}} (3x + 9y + 2) dy = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} dx \left(3xy + \frac{9}{2}y^2 + 2y\right) \Big|_{0}^{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} dx \left(3x\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{9}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{0}^{2} \left(3x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}\left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) + 2 - x\right) dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} \left(2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2}x + \frac{9x^2}{8} + 2\right) dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} \left(\frac{13}{2} - \frac{5}{2}x - \frac{3}{8}x^2\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{13}{2}x - \frac{5x^2}{4} - \frac{3x^3}{8 \cdot 3}\right) \Big|_{0}^{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{13}{2}x - \frac{5x^2}{4} - \frac{x^3}{8}\right) \Big|_{0}^{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{13}{2} \cdot 2 - \frac{5 \cdot 2^2}{4} - \frac{2^3}{8}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{13}{2} \cdot 0 - \frac{5 \cdot 0^2}{4} - \frac{0^3}{8}\right) = \\ &= \frac{1}{2} (13 - 5 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{7}{2} \end{split}$$

Далее находим поток через полную поверхность пирамиды АВСО:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 = \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) + \frac{7}{2} = -\frac{15}{6} + \frac{7}{2} = \frac{-15 + 21}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Вычисление потока векторного поля а(М) б) с помощью формулы Остроградского – Гаусса.

Если S – замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая область V, и P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z) – функции непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой области V, то справедлива формула Остроградского – Γ аусса

$$\Pi = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdy dz$$

По условию

$$P = 3y + 2z \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = (3y + 2z)'_x = 0$$

$$Q = 2x + 3y \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} = (2x + 3y)'_y = 3$$

$$R = y \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial z} = (y)'_z = 0$$

Получаем:

$$\iiint\limits_{V} (0+3+0) dx dy dz = \iiint\limits_{V} 3 dx dy dz$$

Пределы интегрирования

$$0 \le x \le 2$$
; $0 \le y \le 1 - \frac{x}{2}$; $0 \le z \le 1 - \frac{x}{2} - y$

Решаем интеграл

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

$$\begin{split} \Pi &= \iiint\limits_{V} 3 dx dy \, dz = 3 \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{1 - \frac{x}{2} - y} dy \int\limits_{0}^{1 - \frac{x}{2} - y} dz = 3 \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{1 - \frac{x}{2} - y} = 3 \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{1 - \frac{x}{2} - y} dx \int\limits_{0}^{1 - \frac{x}{2} - y} dy = \\ &= 3 \int\limits_{0}^{2} dx \left(y - \frac{xy}{2} - \frac{y^{2}}{2} \right) \Big|_{0}^{1 - \frac{x}{2}} = 3 \int\limits_{0}^{2} dx \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} \right)^{2} \right) = \\ &= 3 \int\limits_{0}^{2} dx \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^{2}}{4} - \frac{1}{2} \left(1 - x + \frac{x^{2}}{4} \right) \right) = 3 \int\limits_{0}^{2} \left(1 - x + \frac{x^{2}}{4} - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^{2}}{8} \right) dx = 3 \int\limits_{0}^{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^{2}}{8} \right) dx = \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} x - \frac{x^{2}}{4} + \frac{x^{3}}{24} \right) \Big|_{0}^{2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{2^{2}}{4} + \frac{2^{3}}{24} \right) - 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{0^{2}}{4} + \frac{0^{3}}{24} \right) = 3 \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{3} = 1 \end{split}$$