

ИДЗ 16.1 – Вариант 0

1. По заданному оригиналу найти изображение по Лапласу:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ M_0 + M_1 t + M_2 t^2 + M_3 t^3 + e^{\alpha t} ((At + B)\sin \omega t + (Ct + D)\cos \omega t) + Ee^{\alpha t} \sigma_0(t) + F\delta(t) + G\delta_1(t) & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

Значения параметров $\alpha, \omega, M_i (i = 0, 1, 2, 3), A, B, C, D, E, F, G$ приведены в табл. 16.1

1.0. $\alpha = 2, \omega = 3, M_0 = 1, M_1 = 2, M_2 = -1, M_3 = 0, A = 0, B = 2, C = 0, D = 1, E = 0, F = 0, G = 0$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 + 2t - t^2 + 2e^{2t} \sin 3t + e^{2t} \cos 3t & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

Получаем функцию

$$f(t) = 1 + 2t - t^2 + e^{2t}(2\sin 3t + \cos 3t) \text{ или } f(t) = 1 + 2t - t^2 + 2e^{2t} \sin 3t + e^{2t} \cos 3t$$

Для отыскания изображения $F(p)$ находим оригиналы всех функций – слагаемых, используя таблицу

$$1 \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{p}; \quad t \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{p^2}, \quad t^2 \xrightarrow{\cdot} \frac{2!}{p^{2+1}} = \frac{2}{p^3}, \quad t^n \xrightarrow{\cdot} \frac{n!}{p^{n+1}}$$

$$e^{\alpha t} \sin \beta t \xrightarrow{\cdot} \frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}; \quad e^{\alpha t} \cos \beta t \xrightarrow{\cdot} \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$$

Для каждой функции в (1) получим

$$1 \xrightarrow{\cdot} \frac{1}{p},$$

$$2t \xrightarrow{\cdot} \frac{2}{p^2},$$

$$t^2 \xrightarrow{\cdot} \frac{2}{p^3}$$

$$2e^{2t} \sin 3t \xrightarrow{\cdot} 2 \cdot \frac{3}{(p - 2)^2 + 3^2} = \frac{6}{(p - 2)^2 + 9},$$

$$e^{2t} \cos 3t \xrightarrow{\cdot} \frac{p - 2}{(p - 2)^2 + 3^2} = \frac{p - 2}{(p - 2)^2 + 9},$$

На основании свойства линейности получаем:

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p^3} + \frac{6}{(p - 2)^2 + 9} + \frac{p - 2}{(p - 2)^2 + 9}$$

Решение задач и примеров

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на **Бесплатные решенные примеры по высшей математике**

2. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{при } 0 \leq t < t_1 \\ f_2(t) & \text{при } t_1 \leq t < t_2 \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t \geq t_2 \end{cases}$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и числовые значения параметров t_1 , t_2 приведены в табл. 16.2.

2.0. $f_1(t) = t-3$, $f_2(t) = 1$, $t_1 = 4$, $t_2 = 5$

$$f(t) = \begin{cases} t-3 & \text{при } 0 \leq t < 4 \\ 1 & \text{при } 4 \leq t < 5 \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t \geq 5 \end{cases}$$

Решение:

С помощью единичной функции Хевисайда представим функцию $f(t)$ в следующем виде:

$$f(t) = (\sigma_0(t) - \sigma_0(t-4)) \cdot (t-3) + (\sigma_0(t-4) - \sigma_0(t-5)) \cdot 1 = \sigma_0(t) \cdot (t-3) - \sigma_0(t-4) \cdot (t-3) + \sigma_0(t-4) - \sigma_0(t-5)$$

Сгруппируем так, чтобы было удобно находить изображения:

$$f(t) = \sigma_0(t) \cdot t - 3\sigma_0(t) - \sigma_0(t-4) \cdot (t-3-1) - \sigma_0(t-5) = \sigma_0(t) \cdot t - 3\sigma_0(t) - \sigma_0(t-4) \cdot (t-4) - \sigma_0(t-5)$$

Получили функцию

$$f(t) = \sigma_0(t) \cdot t - 3\sigma_0(t) - \sigma_0(t-4) \cdot (t-4) - \sigma_0(t-5)$$

Так как $\sigma_0(t) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p}$ и $\sigma_0(t) \cdot t \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p^2}$, $\sigma_0(t-5) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p} e^{-5p}$ то на основании теоремы запаздывания имеем:

$$\sigma_0(t-4) \cdot (t-4) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p^2} e^{-4p}$$

В итоге получим

$$F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} e^{-4p} - \frac{1}{p} e^{-5p}$$

Решение задач и примеров

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на **Бесплатные решенные примеры по высшей математике**

3. По заданному изображению

$$\frac{Ap^2 + Bp + C}{(p+a)(p^2 + bp + c)}$$

найти оригинал. Значения коэффициентов A, B, C, a, b, c приведены в табл. 16.3.

3.0. A = 3, B = 3, C = -18, a = -4, b = 2, c = -3.

$$\frac{3p^2 + 3p - 18}{(p-4)(p^2 + 2p - 3)}$$

Решение:

Разложим знаменатель дроби на линейные множители и представим данную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\frac{3p^2 + 3p - 18}{(p-4)(p^2 + 2p - 3)} = \frac{3p^2 + 3p - 18}{(p-4)(p-1)(p+3)} = \frac{A}{p-4} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p+3} \quad (1)$$

Приравняв в знаменателе к нулю ($p^2 + 2p - 3 = 0$), решим квадратное уравнение

$$p^2 + 2p - 3 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad p_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad p_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

тогда в знаменателе $p^2 + 2p - 3 = (p-1)(p+3)$

Приведя сумму дробей в правой части равенства к общему знаменателю, приравняем числители дробей:

$$\frac{3p^2 + 3p - 18}{(p-4)(p^2 + 2p - 3)} = \frac{A(p-1)(p+3) + B(p-4)(p+3) + C(p-4)(p-1)}{(p-4)(p-1)(p+3)}$$

$$\text{Отсюда } 3p^2 + 3p - 18 = A(p-1)(p+3) + B(p-4)(p+3) + C(p-4)(p-1)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p в обеих частях тождества, найдем значения коэффициентов A, B, C

$$\begin{aligned} \text{при } p = 1 \quad 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 18 &= A(1-1)(1+3) + B(1-4)(1+3) + C(1-4)(1-1) \\ -12 &= -12B; \quad \underline{B = 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } p = 4 \quad 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 - 18 &= A(4-1)(4+3) + B(4-4)(4+3) + C(4-4)(4-1) \\ 42 &= 21A; \quad \underline{A = 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } p = -3 \quad 3 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) - 18 &= A(-3-1)(-3+3) + B(-3-4)(-3+3) + C(-3-4)(-3-1) \\ 0 &= 28C; \quad \underline{C = 0} \end{aligned}$$

Подставляем в выражение (1) найденные значения коэффициентов A, B и C получаем

$$F(p) = \frac{2}{p-4} + \frac{1}{p-1} + \frac{0}{p+3} = \frac{2}{p-4} + \frac{1}{p-1}$$

Воспользовавшись приложением 2, найдем оригинал: $e^{at} = \frac{1}{p-a}$

$$\text{В итоге: } f(t) = 2e^{4t} + e^t$$