ИДЗ 16.2 – Вариант 0

1. Решить операторным методом линейное дифференциальное уравнение

$$\alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + \gamma x = f(t),\ x(t_0) = A,\ \dot{x}(t_0) = B$$

Функцию f(t) и значения коэффициентов α, β, γ, t_0, $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$ взять из табл. 16.4

1.0. $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 2,\ f(t) = \cos t,\ t_0 = 0,\ x(t_0) = 0,\ \dot{x}(t_0) = -1$

$$\dot{x} + 2x = \cos t,\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = -1$$

Решение:

Согласно таблице основных свойств изображений по Лапласу и таблице основных оригиналов f(t) и их изображений по Лапласу

$$\dot{x}(t) \doteq pX(p) - x(0),\quad \ddot{x}(t) \doteq p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0),\ \sin\beta t \doteq \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$$

Из приложений 1,2 находим изображения по Лапласу:

$$\dot{x}(t) \doteq pX(p) - 0 \doteq pX(p),\quad \ddot{x}(t) \doteq p^2X(p) - 0\cdot p - (-1) \doteq p^2X(p) + 1;\quad X(p) \doteq x(t);\quad \cos t \doteq \frac{p}{p^2+1}$$

Получаем операторное уравнение

$$pX(p) + 2X(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$(p+2)X(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

Решаем его относительно X(p)

$$(p+2)X(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

$$X(p) = \frac{p}{(p^2+1)(p+2)}$$

Раскладываем полученную рациональную дробь в сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{p}{(p^2+1)(p+2)} = \frac{A}{p+2} + \frac{Bp+C}{p^2+1}$$

Приведем сумму дробей в правой части равенства к общему знаменателю, приравняем числители дробей:

$$\frac{p}{(p^2+1)(p+2)} = \frac{A(p^2+1) + (Bp+C)(p+2)}{(p^2+1)(p+2)}$$

Отсюда

$$p = A(p^2+1) + (Bp+C)(p+2)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p в обеих частях тождества, найдем значения коэффициентов A, B, C

при $p = -2$

$$-2 = A((-2)^2+1) + (B\cdot(-2)+C)(-2+2)$$

$$-2 = 5A;\ \underline{A = -\frac{2}{5}}$$

при p = 0

$$0 = A\left(0^2+1\right)+\left(B\cdot 0+C\right)\left(0+2\right)$$

$$0 = A+2C;\ 0=-\frac{2}{5}+2C;\ \frac{2}{5}=2C;\ \underline{C=\frac{1}{5}}$$

при p = 1

$$1 = A\left(1^2+1\right)+\left(B\cdot 1+C\right)\left(1+2\right)$$

$$1 = 2A+3B+3C;\ 1=2\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)+3B+3\cdot\frac{1}{5};\ 1=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+3B;\ 1+\frac{1}{5}=3B;\ \frac{6}{5}=3B;\ \ \underline{B=\frac{2}{5}}$$

Подставляем найденные значения коэффициентов A, B и C в выражение для X(p) получим

$$X(p)=\frac{-\frac{2}{5}}{p+2}+\frac{\frac{2}{5}p+\frac{1}{5}}{p^2+1}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p+2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}$$

Воспользовавшись приложением 1 и 2, находим оригинал:

$$\sin\beta t \fallingdotseq \frac{\beta}{p^2+\beta^2};\quad \cos\beta t \fallingdotseq \frac{p}{p^2+\beta^2};\quad e^{\alpha t}\fallingdotseq\frac{1}{p-\alpha}$$

В итоге искомое решение дифференциального уравнения:

$$x(t)=-\frac{2}{5}e^{-2t}+\frac{2}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t$$

2. Решить операторным методом систему линейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_1\dot{x}+b_1\dot{y}+c_1x+d_1y=f_1(t),\ \ x(0)=A, \\ a_2\dot{x}+b_2\dot{y}+c_2x+d_2y=f_2(t),\ \ y(0)=B \end{array}\right\}$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и значения a_k, b_k, c_k, d_k ($k = 1, 2$), A, B, $x(0)$, $y(0)$ взять из табл. 16.5

2.0. $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $c_1 = -2$, $d_1 = -1$, $f_1(t) = t - 1$, $a_2 = 0$, $b_2 = -1$, $c_2 = 0$, $d_2 = 2$, $f_2(t) = 1 - t$, $x(0) = 1$, $y(0)=0$

$$\left.\begin{array}{l} 2\dot{x}+\dot{y}-2x-y=t-1,\ \ x(0)=1, \\ -\dot{y}+2y=1-t,\ \ y(0)=0 \end{array}\right\}$$

Решение:
Согласно таблице основных свойств изображений по Лапласу и таблице основных оригиналов f(t) и их изображений по Лапласу

$$\dot{x}(t)\doteqdot pX(p)-x(0),\quad \dot{y}(t)\doteqdot pY(p)-y(0)$$

Из приложений 1,2 находим изображения по Лапласу:

$$\dot{x}(t)\doteqdot pX(p)-1,\quad \dot{y}(t)\doteqdot pY(p)-0\doteqdot pY(p);\quad X(p)\doteqdot x(t);\quad Y(p)\doteqdot y(t);\quad 1\doteqdot\frac{1}{p};\ t\doteqdot\frac{1}{p^2}$$

Получаем систему операторных уравнений и решим ее относительно X и Y:

$$\left.\begin{array}{l} 2(pX(p)-1)+pY(p)-2X(p)-Y(p)=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{p} \\ -pY(p)+2Y(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p^2} \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 2pX(p)-2+pY(p)-2X(p)-Y(p)=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{p} \\ -pY(p)+2Y(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p^2} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2(p-1)X(p)-2+(p-1)Y(p)=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{p} \\ (2-p)Y(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p^2} \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 2(p-1)X(p)+(p-1)Y(p)=\dfrac{1-p}{p^2}+2 \\ (2-p)Y(p)=\dfrac{p-1}{p^2} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 2(p-1)X(p)+(p-1)Y(p)=\dfrac{1-p+2p^2}{p^2} \\ Y(p)=\dfrac{p-1}{p^2(2-p)} \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 2(p-1)X(p)+(p-1)\cdot\dfrac{p-1}{p^2(2-p)}=\dfrac{1-p+2p^2}{p^2} \\ Y(p)=\dfrac{p-1}{p^2(2-p)} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 2(p-1)X(p)+\dfrac{(p-1)^2}{p^2(2-p)}=\dfrac{1-p+2p^2}{p^2} \\ Y(p)=\dfrac{p-1}{p^2(2-p)} \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 2(p-1)X(p)=\dfrac{1-p+2p^2}{p^2}-\dfrac{(p-1)^2}{p^2(2-p)} \\ Y(p)=\dfrac{p-1}{p^2(2-p)} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2(p-1)X(p) &= \frac{(1-p+2p^2)(2-p)-(p-1)^2}{p^2(2-p)} \\ Y(p) &= \frac{p-1}{p^2(2-p)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2(p-1)X(p) &= \frac{2-2p+4p^2-p+p^2-2p^3-p^2+2p-1}{p^2(2-p)} \\ Y(p) &= \frac{p-1}{p^2(2-p)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2(p-1)X(p) &= \frac{1+4p^2-p-2p^3}{p^2(2-p)} \\ Y(p) &= \frac{p-1}{p^2(2-p)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2(p-1)X(p) &= \frac{1+4p^2-p-2p^3}{p(2-p)} \\ Y(p) &= \frac{p-1}{p^2(2-p)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} X(p) &= \frac{1+4p^2-p-2p^3}{2p(p-1)(2-p)} \\ Y(p) &= \frac{p-1}{p^2(2-p)} \end{aligned}\right\}$$

Разложим знаменатели дробей на простые множители и представим рациональные дроби в выражениях для X(p), Y(p) в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами

$$X(p) = \frac{1+4p^2-p-2p^3}{2p(p-1)(2-p)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{A_1}{p}+\frac{B_1}{p-1}+\frac{C_1}{2-p}\right)$$

$$Y(p) = \frac{p-1}{p^2(2-p)} = \frac{A_2}{p^2}+\frac{B_2}{p}+\frac{C_2}{2-p}$$

Приведем сумму дробей в правой части равенства к общему знаменателю, приравняем числители дробей:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1+4p^2-p-2p^3}{p(p-1)(2-p)} = \frac{A_1(p-1)(2-p)+B_1p(2-p)+C_1p(p-1)}{p(p-1)(2-p)}\right)$$

Отсюда

$$1+4p^2-p-2p^3 = A_1(p-1)(2-p)+B_1p(2-p)+C_1p(p-1)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p в обеих частях тождества, найдем значения коэффициентов A_1, B_1, C_1

Для X(p)

при p = 1 $$1+4\cdot 1^2-1-2\cdot 1^3 = A_1(1-1)(2-1)+B_1\cdot 1\cdot(2-1)+C_1\cdot 1\cdot(1-1)$$
$$2 = B_1;\ \underline{B_1 = 2}$$

при p = 2 $$1+4\cdot 2^2-2-2\cdot 2^3 = A_1(2-1)(2-2)+B_1\cdot 2\cdot(2-2)+C_1\cdot 2\cdot(2-1)$$
$$-1 = 2C_1;\ \underline{C_1 = -\frac{1}{2}}$$

при p = 0 $$1+4\cdot 0^2-0-2\cdot 0^3 = A_1(0-1)(2-0)+B_1\cdot 0\cdot(2-0)+C_1\cdot 0\cdot(0-1)$$
$$1 = -2A_1;\ \underline{A_1 = -\frac{1}{2}}$$

Для Y(p)

Приведем сумму дробей в правой части равенства к общему знаменателю, приравняем числители дробей:

$$\frac{p-1}{p^2(2-p)} = \frac{A_2(2-p)+B_2p(2-p)+C_2p^2}{p^2(2-p)}$$

Отсюда

$$p-1 = A_2(2-p)+B_2p(2-p)+C_2p^2$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p в обеих частях тождества, найдем значения коэффициентов A_2, B_2, C_2

при p = 2
$$2-1=A_2(2-2)+B_2\cdot 2\cdot(2-2)+C_2\cdot 2^2$$
$$1=4C_2;\quad \underline{C_2=\frac{1}{4}}$$

при p = 0
$$0-1=A_2(2-0)+B_2\cdot 0\cdot(2-0)+C_2\cdot 0^2$$
$$-1=2A_2;\quad \underline{A_2=-\frac{1}{2}}$$

при p = 1
$$1-1=A_2(2-1)+B_2\cdot 1\cdot(2-1)+C_2\cdot 1^2$$
$$0=A_2+B_2+C_2;\ 0=-\frac{1}{2}+B_2+\frac{1}{4};\quad \underline{B_2=\frac{1}{4}}$$

Подставляем найденные значения коэффициентов A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 в выражения для X(p) и Y(p) получим

$$X(p)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-\frac{1}{2}}{p}+\frac{2}{p-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{2-p}\right)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2-p}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-2}$$

$$Y(p)=\frac{-\frac{1}{2}}{p^2}+\frac{\frac{1}{4}}{p}+\frac{\frac{1}{4}}{2-p}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2-p}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-2}$$

Воспользовавшись приложением 1 и 2, находим оригинал:

$$1\doteqdot\frac{1}{p};\quad t\doteqdot\frac{1}{p^2};\quad e^{\alpha t}\doteqdot\frac{1}{p-\alpha}$$

В итоге искомое решение системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=-\frac{1}{4}+e^t+\frac{1}{4}e^{2t}\\ y(t)&=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{2t}\end{aligned}\right\}$$