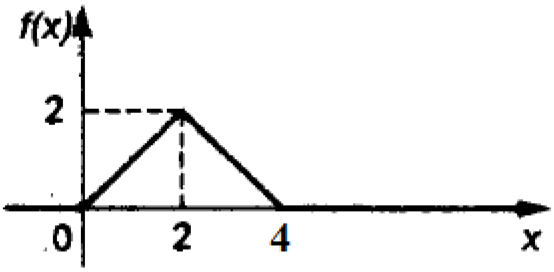
ИДЗ 16.3 – Вариант 0

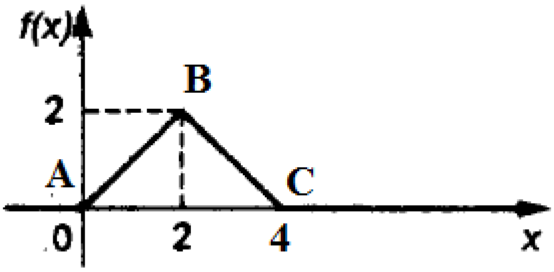
1. Найти изображение по графику оригинала.

1.0



Решение:

Как видно из графика функции, приведенного на рисунке



Воспользуемся уравнением прямой проходящей через две точки $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{f(x)-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}$$

На графике точки с координатами A(0, 0); B(2, 2); C(4; 0), найдем уравнения прямых AB и BC

$$AB:\frac{x-0}{2-0}=\frac{f(x)-0}{2-0}\Rightarrow\frac{x}{2}=\frac{f(x)}{2}\Rightarrow f(x)=x$$

$$BC:\frac{x-2}{4-2}=\frac{f(x)-2}{0-2}\Rightarrow\frac{x-2}{2}=\frac{f(x)-2}{-2}\Rightarrow -2x+4=2f(x)-4\Rightarrow -2x+8=2f(x)\Rightarrow f(x)=4-x$$

Функция может быть записана в аналитическом виде

$$f(x)=\begin{cases}0,\ \text{при}\ x\le 0\\ x,\ \text{при}\ 0<x\le 2\\ 4-x,\ \text{при}\ 2<x\le 4\\ 0,\ \text{при}\ x>4\end{cases}$$

Используем формулу преобразования Лапласа

$$F(p)=\int_0^{+\infty}e^{-px}f(x)dx$$

Следовательно, преобразование Лапласа оригинала f(x) имеет вид

$$F(p)=\int_0^2 e^{-px}\cdot xdx+\int_2^4 e^{-px}\cdot(4-x)dx$$

Решение интеграла

$$\int_0^2 xe^{-px}dx$$

Пусть функции u=u(x) и v=v(x) имеют непрерывные производные на [α, β], тогда

$$\int_a^b udv=(u\cdot v)\Big|_a^b-\int_a^b v\cdot du\text{, где }(u\cdot v)\Big|_a^b=u(b)\cdot v(b)-u(a)\cdot v(a)$$

Пусть u = x, тогда dv = $e^{-px}dx$, du = (x)′dx = dx, v = $-\frac{1}{p}e^{-px}$

Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и F(x) – любая первообразная той функции на [a,b], то определенный интеграл от функции f(x) на [a,b] равен приращению первообразной на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Решаем интеграл

$$\int_0^2 xe^{-px}dx = -\frac{1}{p}xe^{-px}\Big|_0^2 - \int_0^2 -\frac{1}{p}e^{-px}dx = -\frac{1}{p}xe^{-px}\Big|_0^2 + \frac{1}{p}\int_0^2 e^{-px}dx = -\frac{1}{p}\cdot 2\cdot e^{-p\cdot 2} - \left(-\frac{1}{p}\cdot 0\cdot e^{-p\cdot 0}\right) +$$

$$+\frac{1}{p}\cdot\left(-\frac{1}{p}\right)e^{-px}\Big|_0^2 = -\frac{2}{p}e^{-2p} + 0 - \frac{1}{p^2}e^{-px}\Big|_0^2 = -\frac{2}{p}e^{-2p} - \left(\frac{1}{p^2}e^{-p\cdot 2} - \frac{1}{p^2}e^{-p\cdot 0}\right) = -\frac{2}{p}e^{-2p} - \left(\frac{1}{p^2}e^{-2p} - \frac{1}{p^2}\cdot 1\right) =$$

$$= -\frac{2}{p}e^{-2p} - \frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}$$

Решение интеграла

$$\int_2^4 (4-x)\cdot e^{-px}dx$$

Пусть u = 4 − x, тогда dv = $e^{-px}dx$, du = (4 − x)′dx = −dx, v = $-\frac{1}{p}e^{-px}$

Решаем интеграл

$$\int_2^4 (4-x)e^{-px}dx = -\frac{1}{p}(4-x)e^{-px}\Big|_2^4 - \int_2^4 \frac{1}{p}e^{-px}dx = -\frac{1}{p}(4-x)e^{-px}\Big|_2^4 - \frac{1}{p}\int_2^4 e^{-px}dx =$$

$$= -\frac{1}{p}\cdot(4-4)e^{-p\cdot 4} - \left(-\frac{1}{p}\cdot(4-2)e^{-p\cdot 2}\right) - \frac{1}{p}\cdot\left(-\frac{1}{p}\right)e^{-px}\Big|_2^4 = \frac{2}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-px}\Big|_2^4 = \frac{2}{p}e^{-2p} + \left(\frac{1}{p^2}e^{-p\cdot 4} - \frac{1}{p^2}e^{-p\cdot 2}\right) =$$

$$= \frac{2}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-4p} - \frac{1}{p^2}e^{-2p}$$

Окончательно получим

$$F(p) = \int_0^2 e^{-px}\cdot xdx + \int_2^4 e^{-px}\cdot(4-x)dx = -\frac{2}{p}e^{-2p} - \frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-4p} - \frac{1}{p^2}e^{-2p} =$$

$$= -\frac{2}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}e^{-4p} = \frac{1}{p^2}\left(1 - 2e^{-2p} + e^{-4p}\right) = \frac{1}{p^2}\left(1 - e^{-2p}\right)^2$$

Ответ: $F(p) = \frac{1}{p^2}\left(1 - e^{-2p}\right)^2$

2. Вычислить несобственный интеграл с помощью предельных теорем.

2.0. $\int_0^{+\infty} e^{-5x}\sin 4x\cos 3x dx$

Решение:

Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования (1 рода) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ от функции y=f(x) на полуинтервале $[a,+\infty)$ называется предел функции Ф(t) при

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$$

Учтем переход от произведения к сумме

$$\sin 4x\cdot\cos 3x = \frac{1}{2}\left(\sin(4x-3x)+\sin(4x+3x)\right) = \frac{1}{2}(\sin x+\sin 7x)$$

Теорема об интегрировании оригинала. Если $f(t) \doteqdot F(p)$

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}$$

то при условии сходимости несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ справедливо соотношение

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = F(0) \qquad (1)$$

Оно во многих случаях дает возможность вычислить несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом.

Найдем изображение подынтегральной функции

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-5x}(\sin x+\sin 7x) = \frac{1}{2}e^{-5x}\sin x + \frac{1}{2}e^{-5x}\sin 7x \doteqdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+5)^2+1^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{(p+5)^2+7^2} \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+5)^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{(p+5)^2+49}$$

(согласно таблице оригиналов и изображений)

Тогда из равенства (1) следует что

$$\int_0^{+\infty} e^{-5x}\sin 4x\cos 3x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(0+5)^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{(0+5)^2+49} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5^2+49} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25+1} + \frac{7}{25+49} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{26}+\frac{7}{74}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{37+91}{962}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{128}{962} = \frac{32}{481}$$

Ответ: $\int_0^{+\infty} e^{-5x}\sin 4x\cos 3x dx = \frac{32}{481}$

2. Вычислить несобственный интеграл, используя формулу Парсеваля.

2.0. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

Решение:

Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования (1 рода) $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ от функции y=f(x) на полуинтервале $[a,+\infty)$ называется предел функции Ф(t) при

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_a^{t} f(x)dx$$

Теорема Парсеваля. Если имеются операционные соотношения $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$ и функции $F_1(p)$, $F_2(p)$ − аналитические при Re p ≥ 0, то справедливо равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} f_1(u)F_2(u)du = \int\limits_0^{+\infty} F_1(v)f_2(v)dv \qquad (1)$$

Из сходимости одного из интегралов (1) следует сходимость другого.

Найдем изображение подынтегральной функции

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \doteqdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+2^2} \doteqdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}$$

Учли (согласно таблице оригиналов и изображений) $1 \doteqdot \frac{1}{p}$; $\cos\beta x \doteqdot \frac{p}{p^2+\beta^2}$

$$f_1(x) \doteqdot \sin^2 x \doteqdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4} = F_1(p)$$

$$F_2(p) = \frac{1}{p^2} \doteqdot x = f_2(x)$$

Тогда из равенства Парсеваля (1) следует что

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin^2 u \cdot \frac{1}{u^2}du = \int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{v} - \frac{1}{2}\cdot\frac{v}{v^2+4}\right)\cdot vdv = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left(1-\frac{v^2}{v^2+4}\right)dv = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{v^2+4-v^2}{v^2+4}\right)dv = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{4}{v^2+4}dv =$$

$$= \frac{4}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dv}{v^2+4} = 2\lim_{\gamma\to\infty}\int\limits_0^{\gamma}\frac{dv}{v^2+4} = 2\lim_{\gamma\to\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{v}{2}\Big|_0^{\gamma} = \lim_{\gamma\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{v}{2}\Big|_0^{\gamma} = \lim_{\gamma\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{arctg}\frac{0}{2}\right) = (\operatorname{arctg}\infty - 0) = \frac{\pi}{2}$$

Ответ: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$