

ИДЗ 18.2 – Вариант 0

1. Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$.
Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$.
Построить график функции распределения $F(x)$

1.0. Из партии в 10 изделий, среди которых имеется два нестандартных, для проверки качества выбраны случайным образом 3 изделия; СВ X – число нестандартных изделий среди проверяемых.

Решение:

Случайная величина X может принимать значения

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$$

Воспользуемся формулой Бернулли. Если производится n независимых испытаний, при каждом из которых вероятность осуществления события A постоянна и равна p , а вероятность противоположного события равна $q = 1 - p$, то вероятность того, что при этом событие A осуществляется ровно m раз, вычисляется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

где C_n^m – число сочетаний из n элементов по m .

Для данного случая $n = 3$; $m = 0, 1, 2, 3$;

$p = 2/10 = 1/5$; - вероятность того, что в партии из 10 изделий имеется 2 нестандартных

$q = 1 - p = 1 - 1/5 = 4/5$ – вероятность того, что остальные изделия окажутся стандартными

Тогда запишем вероятности

$$P(x=0) = P_0 = C_3^0 \cdot p^0 \cdot q^{3-0} = C_3^0 \cdot p^0 \cdot q^3 = \frac{3!}{0! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{64}{125} = \frac{64}{125}$$

$$P(x=1) = P_1 = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^{3-1} = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{16}{25} = \frac{48}{125}$$

$$P(x=2) = P_2 = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^{3-2} = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 = 3 \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{125}$$

$$P(x=3) = P_3 = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^{3-3} = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^0 = \frac{3!}{3! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0 = 1 \cdot \frac{1}{125} \cdot 1 = \frac{1}{125}$$

Таким образом, искомый закон распределения

X_i	0	1	2	3
$p(i)$	64/125	48/125	12/125	1/125

Проверка: $\frac{64}{125} + \frac{48}{125} + \frac{12}{125} + \frac{1}{125} = 1$

Решение задач и примеров

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**

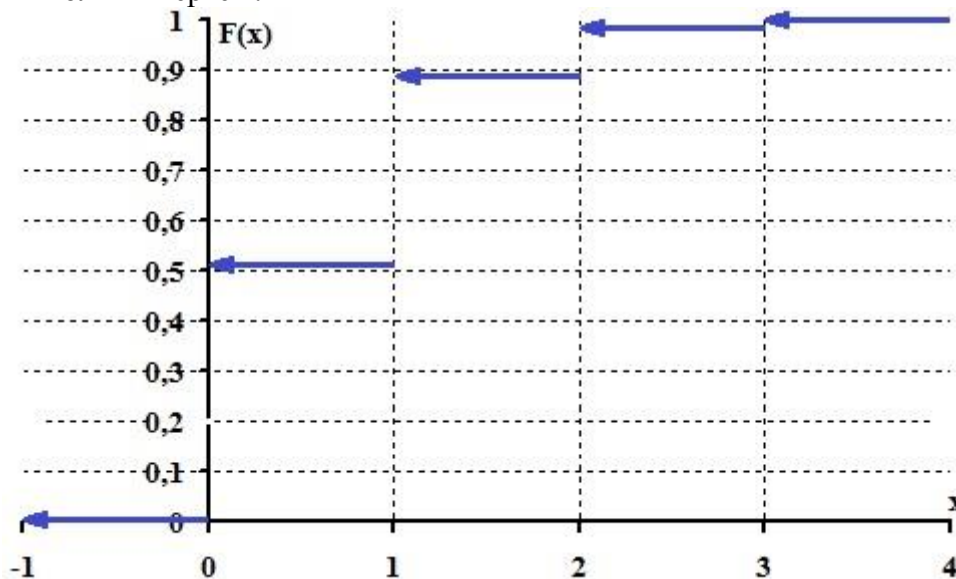
Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на **Бесплатные решенные примеры по высшей математике**

Составим функцию распределения:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{64}{125} & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ \frac{112}{125} & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ \frac{124}{125} & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Выполним чертеж:



Вычислим математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Математическое ожидание равно:

$$M(X) = X_i p(i) = 0 \cdot \frac{64}{125} + 1 \cdot \frac{48}{125} + 2 \cdot \frac{12}{125} + 3 \cdot \frac{1}{125} = \frac{48}{125} + \frac{24}{125} + \frac{3}{125} = \frac{75}{125} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$M(X^2) = X_i^2 p(i) = 0^2 \cdot \frac{64}{125} + 1^2 \cdot \frac{48}{125} + 2^2 \cdot \frac{12}{125} + 3^2 \cdot \frac{1}{125} = \frac{48}{125} + \frac{48}{125} + \frac{9}{125} = \frac{105}{125} = \frac{21}{25} = 0,84$$

Дисперсия равна

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

$$D(X) = 0,84 - 0,6^2 = 0,84 - 0,36 = 0,48$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,48} = 0,69$$

Ответ: $M(X) = 0,6$, $D(X) = 0,48$, $\sigma(X) = 0,69$

Решение задач и примеров

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на **Бесплатные решенные примеры по высшей математике**

2. Дана функция распределения $F(x)$ СВ X . Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a; b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

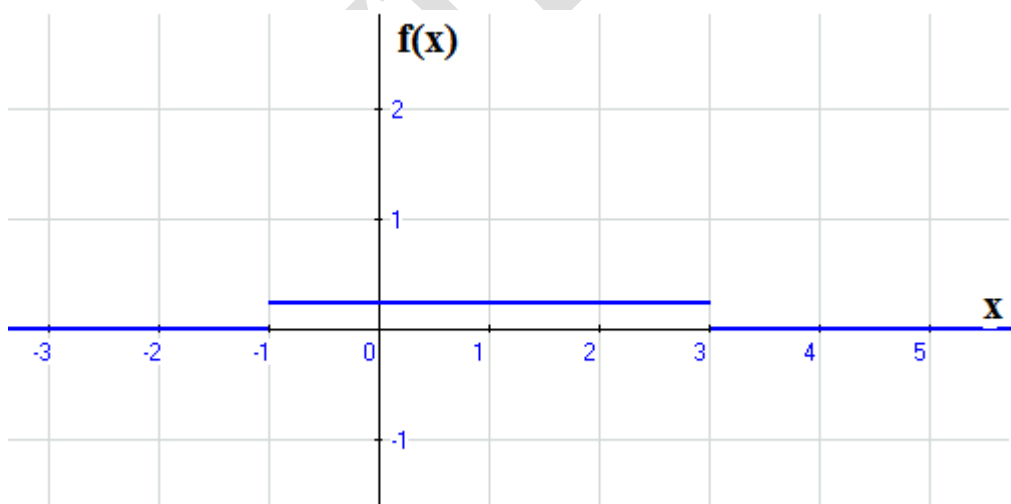
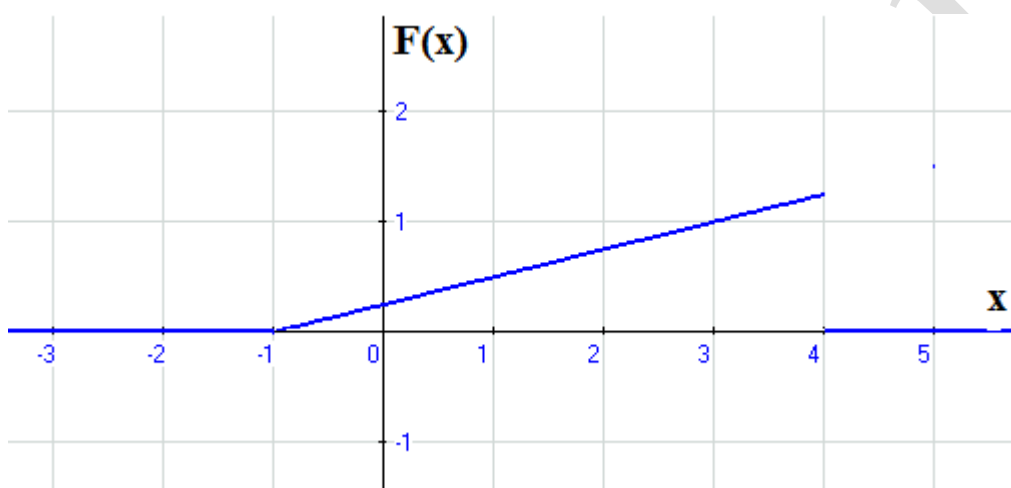
$$2.0. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{4}(x+1) & \text{при } -1 \leq x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases} \quad a = 1, b = 3$$

Решение:

Найдем функцию плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{4} & \text{при } -1 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Построим графики функций $F(x)$ и $f(x)$



Решение задач и примеров

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на **Бесплатные решенные примеры по высшей математике**

Вычисляем математическое ожидание и дисперсию.

Математическое ожидание определяется выражением

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Тогда

$$M(X) = \int_{-1}^3 x \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^3 x dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} \Big|_{-1}^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^3 = \frac{x^2}{8} \Big|_{-1}^3 = \frac{3^2}{8} - \frac{(-1)^2}{8} = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Вычисляем

$$M(X^2) = \int_{-1}^3 x^2 \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^3 x^2 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} \Big|_{-1}^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^3 = \frac{x^3}{12} \Big|_{-1}^3 = \frac{3^3}{12} - \frac{(-1)^3}{12} = \frac{27}{12} + \frac{1}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} = 2,333$$

Дисперсия равна

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

$$D(X) = \frac{7}{3} - 1^2 = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3} = 1,333$$

Найдем вероятность того, что X примет значение из отрезка [1; 3]

$$P(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1) = \frac{1}{4}(3+1) - \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{1}{4} \cdot 2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ - искомая вероятность}$$

Ответ: $M(X) = 1$, $D(X) = 1,333$, $P(1 \leq X \leq 3) = 0,5$

3. Решить следующие задачи.

3.0. СВ X распределена нормально с математическим ожиданием 50 и дисперсией 144.

Вычислить вероятность попадания СВ X в интервал (26; 98).

Решение:

Если плотность распределения вероятностей случайной величины X

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (*)$$

то такое распределение случайной величины X называется нормальным. Входящие в формулу (*) величины a и σ являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратичным отклонением распределенной нормально случайной величины X

Для нормального распределения, вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha; \beta)$ равна:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа, значения которой определяются в приложении

По условию $a = 50$, $\sigma = \sqrt{\delta} = \sqrt{144} = 12$, $\alpha = 26$, $\beta = 98$.

где δ - дисперсия

Решение задач и примеров

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_reshe

Перейти на **Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)**

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на **Бесплатные решенные примеры по высшей математике**

Тогда вычисляем

$$P(26 < X < 98) = \Phi\left(\frac{98-50}{12}\right) - \Phi\left(\frac{26-50}{12}\right) = \Phi\left(\frac{48}{12}\right) - \Phi\left(\frac{-24}{12}\right) = \Phi(4) - \Phi(-2) = 0,499968 + 0,4772 = 0,977168 \approx 0,9772$$

По таблице значений функции Лапласа нашли $\Phi(4) = 0,499968$; $\Phi(2) = 0,4772$

Ответ: $P(26 < X < 98) \approx 0,9772$

4. Решить следующие задачи.

4.0. Математическое ожидание количества выпадающих в течение года в данной местности осадков составляет 60 см. Оценить вероятность того, что в этой местности осадков выпадет не менее 180 см.

Решение:

Если случайная величина X неотрицательная и имеет конечное математическое ожидание, то для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{M(X)}{\varepsilon} \quad (\text{неравенство Маркова}).$$

Пусть случайная величина X – число выпадающих в течение года в данной местности осадков

По условию математическое ожидание $M(X) = 60$

Отклонение $\varepsilon = 180$

Так как о дисперсии СВ X мы ничего не знаем, используем форму неравенства Маркова:

$$P(X \geq 180) \leq \frac{60}{180} = \frac{1}{3} \approx 0,3333$$

$$P(X \geq 180) \leq 0,3333$$

Ответ: не более 0,3333