ИДЗ 5.1 – Вариант 0

Найти указанные пределы

1.0 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-3x-18}=\dfrac{(-3)^2+5\cdot(-3)+6}{(-3)^2-3\cdot(-3)-18}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ – неопределенность

Числитель приравняем к 0, получим:

$x^2+5x+6=0$

$D=b^2-4ac=25+4\cdot1\cdot6=25-24=1$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\qquad x_1=\dfrac{-5+1}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2\qquad x_2=\dfrac{-5-1}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$

Знаменатель приравняем к 0, получим:

$x^2-3x-18=0$

$D=b^2-4ac=9+4\cdot1\cdot18=9+72=81$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\qquad x_1=\dfrac{3+9}{2}=\dfrac{12}{2}=6;\quad x_2=\dfrac{3-9}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$

Получаем:

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-18}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+2)(x+3)}{(x-6)(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{x+2}{x-6}=\frac{-3+2}{-3-6}=\frac{-1}{-9}=\frac{1}{9}$$

2.0 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+x-4}{\sqrt{4x-3}-\sqrt{x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ – неопределенность

Числитель приравняем к 0, получим:

$3x^2+x-4=0$

Решим квадратное уравнение

Находим дискриминант

$D=b^2-4ac,\quad D=1+4\cdot3\cdot4=1+48=49$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\qquad x_1=\dfrac{-1+7}{6}=\dfrac{6}{6}=1\qquad x_2=\dfrac{-1-7}{6}=\dfrac{-8}{6}=-\dfrac{4}{3}$

Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{4x-3}+\sqrt{x}$

Получаем:

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2+x-4}{\sqrt{4x-3}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(\sqrt{4x-3}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{4x-3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{4x-3}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(\sqrt{4x-3}+\sqrt{x}\right)}{(4x-3-x)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(\sqrt{4x-3}+\sqrt{x}\right)}{3(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(3x+4)\left(\sqrt{4x-3}+\sqrt{x}\right)}{3}=\frac{(3\cdot1+4)\left(\sqrt{4\cdot1-3}+\sqrt{1}\right)}{3}=\frac{7\cdot2}{3}=\frac{14}{3}$$

3.0 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x-2}{4x^3-7x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ – неопределенность

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x-2}{4x^3-7x+5}=\left\{\begin{matrix}\text{числитель и знаменатель}\\ \text{делим на } x^3\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3+4x-2}{x^3}}{\frac{4x^3-7x+5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{4x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{7x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{4-\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3}}=\frac{3+\frac{4}{\infty}-\frac{2}{\infty}}{4-\frac{7}{\infty}+\frac{5}{\infty}}=\frac{3}{4}$$

4.0 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ – неопределенность

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\left\{\begin{matrix}\text{числитель и знаменатель}\\ \text{делим на } x^4\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\frac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3}{x^4}+\frac{15x^2}{x^4}+\frac{9x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{5x^4}{x^4}+\frac{6x^2}{x^4}-\frac{3x}{x^4}-\frac{4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{15}{x^2}+\frac{9}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{5+\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}}=\frac{\frac{7}{\infty}+\frac{15}{\infty}+\frac{9}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{5+\frac{6}{\infty}-\frac{3}{\infty}-\frac{4}{\infty}}=\frac{0}{5}=0$$

5.0 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^3-2x+1}{6x+2}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-2x+1}{6x+2}=\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{числитель и знаменатель}\\ \text{делим на } x^3\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4x^3-2x+1}{x^3}}{\frac{6x+2}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{6x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{4}{0}=\infty$$

6.0 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)$ - неопределенность

Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$

Тогда, решаем предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x-(1-x))}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+x-1+x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=2\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{2}{2}=1$$

7.0 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$

Второй замечательный предел.

при $x\to\infty$ основание $\frac{x-7}{x}\to1$, а показатель степени $x\to\infty$. Следовательно, имеем неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$.

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x}\right)^{\frac{x}{-7}\cdot\frac{-7}{x}\cdot(2x+1)}=\left\{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-7}{x}\right)^{\frac{x}{-7}}\right\}^{\frac{-7}{x}(2x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-14x-7}{x}}=e^{-14}$$

8.0 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+2}\right)^{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{x-3}$

при $x\to\infty$ основание $\frac{x+2}{2x-3}\to\frac{1}{2}$, а показатель степени $x\to\infty$. Следовательно, имеем $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}\right]$.

Если предел основания меньше единицы, значит, предел равен нулю

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+2}\right)^{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^{x-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0$$

9.0 $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)$ – неопределенность

Для раскрытия неопределенностей, содержащих тригонометрические функции, используем первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha x\to0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$

Согласно тригонометрическому тождеству:

$$tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$$

Тогда, решаем предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2\cdot\cos x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}\cdot x}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}\cdot x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=0$$