ИДЗ 5.2 – Вариант 0

1. Доказать, что функции f(x) и φ(x) при x→0 являются бесконечно малыми одного порядка малости.

1.0 $f(x)=\sin(x^2-3x)$, $\varphi(x)=x^4-27x$

Находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-3x)}{x^4-27x}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

В числителе $\sin\alpha x\sim\alpha x$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-3x)}{x^4-27x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{x^4-27x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)}{x(x^3-27)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{(x^3-27)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{(x-3)(x^2+3x+9)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+3x+9}=\frac{1}{0^2+3\cdot 0+9}=\frac{1}{9}$$

Так как предел отличен от нуля $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{9}\neq 0$ в этом случае f(x) и φ(x) называются бесконечно малыми одного порядка малости.

2. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

2.0 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{8x}-1}{\sin 4x}$

Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых.

$e^{\alpha x}-1\sim\alpha x$

$\sin\alpha x\sim\alpha x$

Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{8x}-1}{\sin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{4x}=\frac{8}{4}=2$$

3. Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики.

3.0 $f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{если } x<0 \\ x^2-1, & \text{если } 0\le x<3 \\ \sqrt{x+1}, & \text{если } x\ge 3 \end{cases}$

При исследовании функции, заданной несколькими аналитическими выражениями следует рассматривать граничные точки: т.е. точки перехода от одного вида функции к другой.

Точки разрыва $x_1=0,\ x_2=3$

1) Находим пределы функции в указанных точках

Для точки $x_1=0$

$$\lim_{x\to 0-0} x-1=-1$$

$$\lim_{x\to 0+0} x^2-1=-1$$

В точке $x_1=0$ предел существует и равен -1.

В точке $x_1=0$ функция непрерывна.

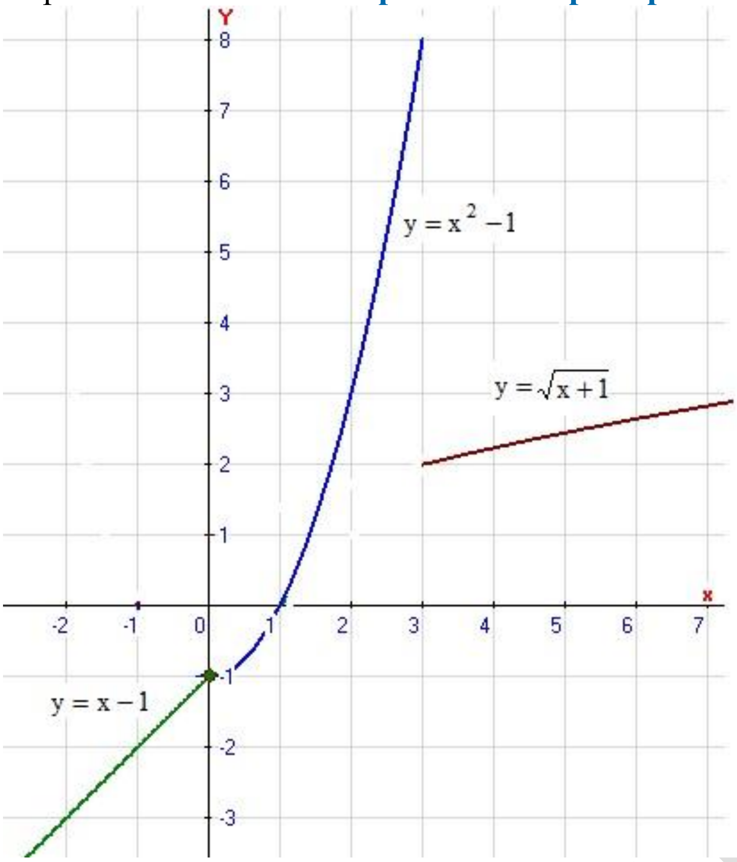
Для точки $x_2=3$

$$\lim_{x\to 3-0} x^2-1=3^2-1=8$$

$$\lim_{x\to 3+0} \sqrt{x+1}=\sqrt{3+1}=2$$

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)\ne \lim_{x\to 3+0} f(x)$$

Точка разрыва первого рода



4. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках.

4.0 $f(x) = 6^{\frac{3}{x+4}} + 3; \quad x_1 = -4, \ x_2 = 2$

Для точки $x_1 = -4$ имеем:

$$\lim_{x\to -4-0} f(x) = \lim_{x\to -4-0} 6^{\frac{3}{x+4}} + 3 = 6^{-\infty} + 3 = 3$$

$$\lim_{x\to -4+0} f(x) = \lim_{x\to -4+0} 6^{\frac{3}{x+4}} + 3 = 6^{\infty} + 3 = \infty$$

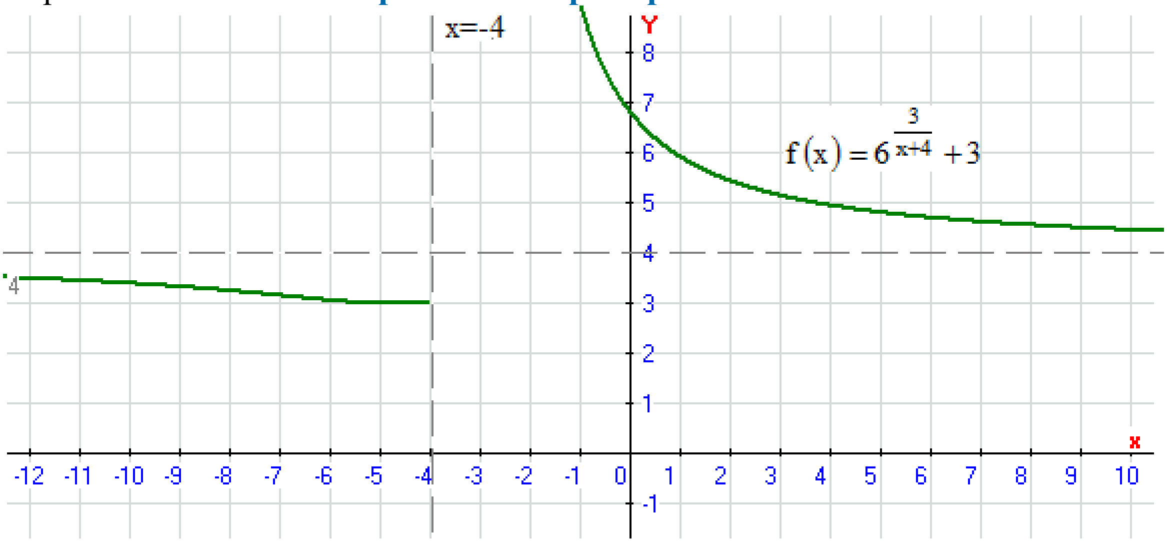
Т.е. в точке $x_1 = -4$ функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв ($x_1 = -4$ - точка разрыва второго рода).

Для точки $x_2 = 2$ имеем:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} 6^{\frac{3}{x+4}} + 3 = 6^{\frac{3}{6}} + 3 = 6^{\frac{1}{2}} + 3 = 2{,}45 + 3 = 5{,}45$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} 6^{\frac{3}{x+4}} + 3 = 6^{\frac{3}{6}} + 3 = 6^{\frac{1}{2}} + 3 = 2{,}45 + 3 = 5{,}45$$

Следовательно, в точке $x_2 = 2$ функция $f(x)$ непрерывна.


x=-4
Y
x
$f(x)=6^{\frac{3}{x+4}}+3$
-12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
8 7 6 5 4 3 2 1 -1