#### Решение задач и примеров

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim\_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

#### ИДЗ 8.3 - Вариант 0

#### Найти неопределенные интегралы.

1.0 
$$\int \sqrt{16-x^2} dx$$

Сделаем замену  $x = 4 \sin t$  отсюда  $dx = 4 \cos t dt$ 

$$\sin t = \frac{x}{4}, \quad t = \arcsin \frac{x}{4}$$

Получаем:

$$\int \sqrt{16-x^2} \, dx = \int \sqrt{16-16\sin^2 t} \cdot 4\cos t \, dt = 16 \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt = 16 \int \cos t \cdot \cos t \, dt = 16 \int \cos^2 t \, dt$$

Согласно тригонометрическому тождеству

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

$$\int \sqrt{16 - x^2} dx = 16 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 8 \int (1 + \cos 2t) dt = 8t + \frac{8}{2} \sin 2t + C = 8t + 4 \sin 2t + C = 8t + 8 \sin t \cos t + C = 8t + 8$$

$$= 8t + 8\sin t\sqrt{1 - \sin^2 t} + C$$

Вернемся к старой замене

$$\int \sqrt{16-x^2} \, dx = 8 \arcsin \frac{x}{4} + 2x \sqrt{1 - \frac{1}{16}x^2} + C = 8 \arcsin \frac{x}{4} + \frac{2x}{4} \sqrt{16-x^2} + C = 8 \arcsin \frac{x}{4} + \frac{x}{2} \sqrt{16-x^2} + C$$

**2.0** 
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$$

Сделаем замену 
$$x = \frac{1}{t}$$
,  $t = \frac{1}{x}$  отсюда  $dx = -\frac{dt}{t^2}$ 

Получаем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 5x + 1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{5}{t} + 1}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{t^2 + 5t + 1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{t\cdot\frac{1}{t}\sqrt{t^2 + 5t + 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 5t + 1}}$$

Разложим знаменатель в квадрат разности

$$t^{2} + 5t + 1 = t^{2} + 2 \cdot \frac{5}{2}t + \frac{25}{4}t + 1 - \frac{25}{4}t = \left(t + \frac{5}{2}\right)^{2} - \frac{21}{4}t$$

Применима формула: Табличная формула интегрирования  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2-b^2}} = \frac{1}{a} \ln \left| ax + \sqrt{a^2x^2-b^2} \right| + C$ 

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 5x + 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 5t + 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}}} = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}} \right| + C = -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}}$$

$$= -\ell n \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{t^2 + 5t + 1} \right| + C$$

## Решение задач и примеров

Группа ВКонтакте <a href="https://vk.com/fizmathim\_resh">https://vk.com/fizmathim\_resh</a>

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

Вернемся к обратной замене  $t = \frac{1}{x}$ :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x} + 1} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1+5x+x^2}{x^2}} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{1+5x+x^2}}{x} \right| + C = -\ell n \left| \frac{1}{x} + \frac{5}{x} + \frac{5}{x} + \frac{5}{x} + \frac{5}{x} + \frac{5}{x} + \frac{5}{x} + \frac{5}{x$$

3.0 
$$\int (x-7)\sin 5x dx$$

Применим метод интегрирования по частям, причем справедлива формула  $\int u dv = uv - \int v du$ 

Пусть u = (x - 7), тогда  $dv = \sin 5x dx$ , du = dx,  $v = -\frac{1}{5}\cos 5x$ 

Имеем:

$$\int (x-7)\sin 5x dx = -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x - \int -\frac{1}{5}\cos 5x dx = -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{5}\int \cos 5x dx =$$

$$= -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{5}\cdot \frac{1}{5}\sin 5x + C = -\frac{1}{5}(x-7)\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C$$

**4.0** 
$$\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Применим метод интегрирования по частям, причем справедлива формула  $\int u dv = uv - \int v du$ 

Пусть 
$$u=arctgx$$
 , тогда  $du=\dfrac{dx}{1+x^2}$  ,  $dv=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$  ,  $v=\sqrt{1+x^2}$ 

Имеем:

$$\int \frac{x a r c t g x}{\sqrt{1+x^2}} dx = a r c t g x \cdot \sqrt{1+x^2} - \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} dx = a r c t g x \cdot \sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = a r c t g x \cdot \sqrt{1+x^2} - \ell n \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + C$$

# 5.0 $\int \arccos 4x dx$

Применим метод интегрирования по частям, причем справедлива формула  $\int u dv = uv - \int v du$ 

Пусть 
$$u = \arccos 4x$$
, тогда  $dv = dx$ ,  $du = -\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}dx$ ,  $v = x$ 

Имеем:

$$\int \arccos 4x dx = x \arccos 4x - \int -\frac{4x dx}{\sqrt{1 - 16x^2}} = x \arccos 4x + \int \frac{4x dx}{\sqrt{1 - 16x^2}}$$

Решим интеграл:

## Решение задач и примеров

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim\_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

$$\int \frac{4x dx}{\sqrt{1 - 16x^2}} = \begin{vmatrix} 1 - 16x^2 = t \\ dt = -32x dx \end{vmatrix} = -\frac{4}{32} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{8} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{8} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{8} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{4} t^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{$$

Витоге

$$\int \arccos 4x dx = x \arccos 4x - \frac{1}{4}\sqrt{1 - 16x^2} + C$$

**6.0** 
$$\int xe^{x-7} dx$$

Применим метод интегрирования по частям, причем справедлива формула

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Пусть u=x , тогда  $dv=e^{x-7}dx$  , du=dx ,  $v=e^{x-7}$ 

Имеем:

$$\int xe^{x-7}dx = xe^{x-7} - \int e^{x-7}dx = xe^{x-7} - e^{x-7} + C = e^{x-7}(x-1) + C$$

7.0 
$$\int (x^2 + 5)\cos x dx$$

Применим метод интегрирования по частям, причем справедлива формула

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Пусть  $u = x^2 + 5$ , тогда  $dv = \cos x dx$ , du = 2x dx,  $v = \sin x$ 

Имеем:

$$\int (x^2 + 5)\cos x dx = (x^2 + 5)\sin x - 2\int x \sin x dx$$

Пусть u = x, тогда  $dv = \sin x dx$ , du = dx,  $v = -\cos x$ 

Тогда решение интеграла примет вид:

$$\int (x^2 + 5)\cos x dx = (x^2 + 5)\sin x - 2\int x \sin x dx = (x^2 + 5)\sin x - 2(-x \cos x - \int -\cos x dx) =$$

$$= (x^2 + 5)\sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C = (x^2 + 3)\sin x + 2x \cos x + C$$

**8.0** 
$$\int (x^2 + 9)e^x dx$$

Применим метод интегрирования по частям, причем справедлива формула

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Пусть 
$$u = x^2 + 9$$
, тогда  $dv = e^x dx$ ,  $du = 2xdx$ ,  $v = e^x$ 

Имеем:

$$\int (x^2 + 9)e^x dx = (x^2 + 9)e^x - 2\int xe^x dx$$

Пусть 
$$u = x$$
, тогда  $dv = e^x dx$ ,  $du = dx$ ,  $v = e^x$ 

Имеем:

$$\int (x^2 + 9)e^x dx = (x^2 + 9)e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = (x^2 + 9)e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 + 9 + 2 - 2x) + C = e^x(x^2 - 2x + 11) + C$$