Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

ИДЗ 8.4 - Вариант 0

Найти неопределенные интегралы.

1.0
$$\int \frac{4x+5}{(x+1)(x^2-5x+6)} dx$$

Для интегрирования рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P(x) и Q(x) - полиномы, используется

следующая последовательность шагов:

Если дробь неправильная (т.е. степень P(x) больше степени Q(x)), преобразовать ее в правильную, выделив целое выражение;

Разложить знаменатель Q(x) на произведение одночленов и/или несократимых квадратичных выражений;

Разложить рациональную дробь на простейшие дроби, используя метод неопределенных коэффициентов;

Вычислить интегралы от простейших дробей.

Запишем интеграл и разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\int \frac{4x+5}{(x+1)(x^2-5x+6)} dx = \int \frac{4x+5}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$
(1)
$$\text{rge } x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Отсюда

$$4x+5 = A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x-2)(x+1)$$

Найдем значения коэффициентов А, В, С

$$при x = -1$$

$$1 = 12A$$

$$A = \frac{1}{12}$$

$$при x = 2$$

$$13 = -3B$$

$$B = -\frac{13}{3}$$

при
$$x = 3$$

$$17 = 4C$$

$$C = \frac{17}{4}$$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов А, В, С получаем интеграл:

$$\int \frac{4x+5}{(x+1)(x^2-5x+6)} dx = \frac{1}{12} \cdot \int \frac{dx}{x+1} - \frac{13}{3} \cdot \int \frac{dx}{x-2} + \frac{17}{4} \int \frac{dx}{x-3} = \frac{1}{12} \ln|x+1| - \frac{13}{3} \ln|x-2| + \frac{17}{4} \ln|x-3| + C$$

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

$$2.0\int \frac{x+5}{(x+1)^2} dx$$

Запишем интеграл и разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\int \frac{x+5}{(x+1)^2} dx = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1}$$
 (1)

Отсюда

$$x + 5 = A + B(x + 1)$$

Найдем значения коэффициентов А, В

при
$$x = -1$$

$$4 = A$$

при х=0

$$5 = A + B$$

$$5 = 4 + B$$

$$B = 1$$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов А, В получаем интеграл:

$$\int \frac{x+5}{(x+1)^2} dx = \int \frac{4}{(x+1)^2} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ell n |x+1| + C = 4 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-$$

3.0
$$\int \frac{(x^2 - 3x + 1)dx}{x(x+1)(x-3)}$$
$$\int \frac{(x^2 - 3x + 1)dx}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$
(1)

Отсюда

$$x^{2}-3x+1 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x+1)$$

Найдем значения коэффициентов А, В, С

$$при x = 0$$

$$1 = -3A$$

$$A = -\frac{1}{3}$$

при
$$x = -1$$

$$5 = 4B$$

$$B = \frac{5}{4}$$

при
$$x = 3$$

$$1 = 12C$$

$$C = \frac{1}{12}$$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов А, В, С получаем интеграл:

$$\int \frac{(x^2 - 3x + 1)dx}{x(x + 1)(x - 3)} = -\frac{1}{3} \cdot \int \frac{dx}{x} + \frac{5}{4} \cdot \int \frac{dx}{x + 1} + \frac{1}{12} \int \frac{dx}{x - 3} = -\frac{1}{3} \ln |x + \frac{5}{4} \ln |x + 1| + \frac{1}{12} \ln |x - 3| + C$$

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

4.0
$$\int \frac{(2x^2 + x - 1)}{(x - 1)^2 (x + 1)} dx$$

Запишем интеграл и разложим подынтегральное выражение на простейшие дроби:

$$\int \frac{(2x^2 + x - 1)}{(x - 1)^2 (x + 1)} dx = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}$$
 (1)

Отсюда

$$2x^{2} + x - 1 = A(x+1) + B(x+1)(x-1) + C(x-1)^{2}$$

Найдем значения коэффициентов А, В, С

при
$$x = -1$$

$$0 = 4C$$

$$C = 0$$

при х=1

$$2 = 2A$$

$$A = 1$$

$$-1 = A - B + C$$

$$-1 = 1 - B + 2 \cdot 0$$

$$-2 = -B$$

$$B=2$$

Подставляем в выражение (1), найденные значения коэффициентов А, В, С получаем интеграл:

$$\int \frac{(2x^2 + x - 1)}{(x - 1)^2 (x + 1)} dx = 1 \int \frac{dx}{(x - 1)^2} + 2 \int \frac{dx}{x - 1} dx + \int \frac{0}{x + 1} dx = \int \frac{dx}{(x - 1)^2} + 2 \int \frac{dx}{x - 1} dx = \frac{(x - 1)^{-1}}{-1} + 2\ell n |x - 1| + C = -\frac{1}{x - 1} + 2\ell n |x - 1| + C$$

5.0
$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1}$$

Сделаем замену $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$ отсюда dx = 2tdt,

Получаем:

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1} = \int \frac{2t \cdot t dt}{t^2 + 1} = 2\int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} = 2\int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = \left\{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C\right\} = 2t - 2\operatorname{arctgt} + C$$

Возвратившись к старой переменной, имеем

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1} = 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + C$$

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

6.0
$$\int \frac{\sqrt{x+1} dx}{\sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[6]{x+1}} dx$$

Сделаем замену $\sqrt[6]{x+1} = t$, $\sqrt[3]{x+1} = t^2$ $\sqrt{x+1} = t^3$ $x = t^6 - 1$ отсюда $dx = 6t^5 dt$, Получаем:

$$\int \frac{\sqrt{x+1} dx}{\sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[6]{x+1}} dx = \int \frac{6t^3 \cdot t^5 dt}{t^2 + 3t} = 6\int \frac{t^8 dt}{t(t+3)} = 6\int \frac{t^7 dt}{t+3}$$

По теореме Безу

По теореме Безу:
$$-\frac{t^7}{t^7 + 3t^6} = \frac{t + 3}{t^6 - 3t^5 + 9t^4 - 27t^3 + 81t^2 - 243t + 729}$$

$$-3t^6 - 9t^5$$

$$-3t^6 - 9t^5$$

$$-9t^5$$

$$-27t^4$$

$$-27t^4$$

$$-27t^4 - 81t^3$$

$$-81t^3$$

$$-243t^2$$

$$-243t^2$$

$$-243t^2$$

$$-243t^2$$

$$-29t$$

$$-29t$$

$$-29t$$

$$-2187$$

Решаем:

$$\begin{split} &\int \frac{\sqrt{x+1} dx}{\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[6]{x+1}} = 6 \int \left(t^6 - 3t^5 + 9t^4 - 27t^3 + 81t^2 - 243t + 729 + \frac{-2187}{t+3} \right) dt = \\ &= 6 \int t^6 dt - 18 \int t^5 dt + 54 \int t^4 dt - 162 \int t^3 dt + 486 \int t^2 dt - 1458 \int t dt + 4374 \int dt - 13122 \int \frac{dt}{t+3} = \\ &= 6 \frac{t^{6+1}}{6+1} - 18 \frac{t^{5+1}}{5+1} + 54 \frac{t^{4+1}}{4+1} - 162 \frac{t^{3+1}}{3+1} + 486 \frac{t^{2+1}}{2+1} - 1458 \frac{t^{1+1}}{1+1} + 4374t - 13122 \ell n |t+3| + C = \\ &= 6 \frac{t^7}{7} - 18 \frac{t^6}{6} + 54 \frac{t^5}{5} - 162 \frac{t^4}{4} + 486 \frac{t^3}{3} - 1458 \frac{t^2}{2} + 4374t - 13122 \ell n |t+3| + C = \\ &= \frac{6t^7}{7} - 3t^6 + \frac{54t^5}{5} - \frac{81t^4}{2} + 162t^3 - 729t^2 + 4374t - 13122 \ell n |t+3| + C \end{split}$$

Возвратившись к старой переменной, имеем

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

$$\int \frac{\sqrt{x+1} dx}{\sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[6]{x+1}} = \frac{6\sqrt[6]{(x+1)^7}}{7} - 3(x+1) + \frac{54\sqrt[6]{(x+1)^5}}{5} - \frac{81\sqrt[3]{(x+1)^2}}{2} + 162\sqrt{x+1} - 729\sqrt[3]{x+1} + 4374\sqrt[6]{x+1} - 13122\ell n \left| \sqrt[6]{x+3} + 1 \right| + C$$

$$7.0 \int \frac{\sin x dx}{4 - 3\sin x} \\
- \sin x - \frac{4}{3} - \frac{1}{3}$$

Тогда

$$\int \frac{\sin x dx}{4 - 3\sin x} = \int \left(-\frac{1}{3} + \frac{\frac{4}{3}}{4 - 3\sin x} \right) dx = -\frac{1}{3} \int dx + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{4 - 3\sin x} = -\frac{1}{3} x + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{4 - 3\sin x}$$

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой

$$tg\frac{x}{2} = z$$
, откуда $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

Тогда

$$\int \frac{dx}{4 - 3\sin x} = \int \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{4 - 3 \cdot \frac{2z}{1 + z^2}} = \int \frac{\frac{2dz}{1 + z^2}}{\frac{4(1 + z^2) - 6z}{1 + z^2}} = \int \frac{2dz}{\left(4(1 + z^2) - 6z\right)} = \int \frac{2dz}{4z^2 - 6z + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2 - \frac{3}{2}z + 1}$$

Знаменатель представим в виде квадрата разности:

$$z^{2} - \frac{3}{2}z + 1 = \left(z^{2} - \frac{3}{2}z + \frac{9}{16}\right) + 1 - \frac{9}{16} = \left(z - \frac{3}{4}\right)^{2} + \frac{7}{16}$$

Табличная формула интегрирования:

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{a}^2} = \frac{1}{\mathrm{a}} \arctan \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} + \mathrm{C}$$

Тогла

$$\int \frac{dx}{4 - 3\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\left(z - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \arctan \left(\frac{z - \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{4z - 3}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \left(\frac{4z - 3}{\sqrt{7}}\right) + C$$

Возвращаемся к замене $z = tg\frac{x}{2}$, тогда

$$\int \frac{\sin x dx}{4 - 3\sin x} = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} \arctan \frac{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3}{\sqrt{7}} + C = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3\sqrt{7}} \arctan \frac{4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3}{\sqrt{7}} + C$$

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

8.0
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin 2x + 3\sin^2 x}$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin 2x + 3\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 3\sin^2 x}$$

Воспользуемся тригонометрической подстановкой

tgx = z, откуда
$$\sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$
, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$

Получаем:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 3\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{1}{1+z^2} - 2\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + 3\frac{z^2}{1+z^2} =$$

$$=\int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{1}{1+z^2} - \frac{2z}{1+z^2} + 3\frac{z^2}{1+z^2}} = \int \frac{\frac{dz}{1+z^2}}{\frac{1-2z+3z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{3z^2 - 2z + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}}$$

Знаменатель представим как квадрат разности:

$$z^{2} - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} = z^{2} - \frac{2}{3}z + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \left(z - \frac{1}{3}\right)^{2} + \frac{2}{9}$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 3\sin^2 x} = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}} = \left\{ \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \right\} = \frac{1}{3} \left\{ \int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \right\} = \frac{1}{3} \left\{ \int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3}} \arctan \left(\frac{z - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} + C \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{3z - 1}{\sqrt{2}} \right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{3z - 1}{\sqrt{2}} \right) + C$$

Возвращаемся κ замене z=tgx, тогда

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - 2\sin x \cos x + 3\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{(3tgx - 1)}{\sqrt{2}} + C$$

Группа ВКонтакте https://vk.com/fizmathim_resh

Перейти на Готовые решения ИДЗ Рябушко (по вариантам)

Решение задач по высшей математике на заказ

Перейти на Бесплатные решенные примеры по высшей математике

9.0
$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x}$$

Используем случай

$$\int \frac{\sin^{2n} x dx}{\cos^{2m} x} = \int \frac{\sin^{2n} x \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^{m-n-1} dx}{\cos^{2m} x} \,, \, \text{где n, m — целые неотрицательные числа}$$

Решаем интеграл

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x} = \int \frac{\sin^2 x \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \left(\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x\right)}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^6 x + 2\sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^4 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\sin^6 x + 2\sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^4 x}{\cos^8 x} dx + 2\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$$

Согласно тригонометрическому тождеству: $\frac{\sin x}{\cos x} = tgx$, тогда запишем интегралы

$$\int \frac{\sin^{2} x dx}{\cos^{8} x} = \int \frac{tg^{6} x}{\cos^{2} x} dx + 2 \int \frac{tg^{4} x}{\cos^{2} x} dx + \int \frac{tg^{2} x}{\cos^{2} x} dx$$

Воспользуемся заменой tgx = t, $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$

Тогда

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x} = \int \frac{tg^6 x}{\cos^2 x} dx + 2 \int \frac{tg^4 x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x} dx = \int t^6 dt + 2 \int t^4 dt + \int t^2 dt = \frac{t^7}{7} + 2 \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + C$$

Возвратившись к старой переменной: t = tgx

B HTOEA:

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^8 x} = \frac{tg^7 x}{7} + \frac{2tg^5 x}{5} + \frac{tg^3 x}{3} + C$$